Corrigés

Chapitre 2 Continuité et convexité

Avant de commencer

1 Réponses C et D.
L'image de 1 par f n'est pas égale à 3 car le point de coordonnées (1 ; 3) n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}$. Donc la réponse A est fausse.
Les points de coordonnées (0 ; 4) et (3 ; 1) appartiennent à la courbe donc les réponses C et D sont exactes.

2 Réponse C et D.
Comme la droite d'équation $y = 2$ a trois points d'intersection avec la courbe $\mathscr{C}$ alors l'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions. Graphiquement, on constate que l'un de ces points d'intersection a une abscisse négative et que les deux autres ont une abscisse positive. Donc les réponses C et D sont exactes.

3 Réponse A.
On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés sur et au-dessus de la droite d'équation $y = 1$. La réponse exacte est la réponse A.

4 Réponse B.
On lit le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1,5. Pour cela, on peut utiliser les points A et B placés sur le graphique. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $-\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$. La réponse exacte est la réponse B.

5 Réponses B et C.
$f'(x) = 0$ lorsque la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale, donc pour $x = 0$ et $x = 3$. Les réponses B et C sont exactes.

6 Réponses B et D.
$g'(x) \geqslant 0$ lorsque la fonction g est croissante, donc sur l'intervalle [2 ; 3]. La réponse B est exacte.
Sur l'intervalle [–5 ; 2], g est décroissante et $g'(x) \leqslant 0$. Donc $g'(-2) \leqslant 0$. La réponse D est exacte.

7 Réponses B et D.
La valeur la plus petite atteinte par les images par f est 0, donc la réponse B est exacte.
Pour $x \in [-5 ; 2]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant 4$ et g est strictement décroissante. Donc 1 n'a qu'un seul antécédent par g dans cet intervalle. Sur l'intervalle [2 ; 5], la valeur maximale de g est 1, il est atteint une seule fois. Donc l'équation $g(x) = 1$ a deux solutions. La réponse D est exacte.

8 a. $f'(x) = 6x + 5$ **b.** $g'(t) = 2t^2 - 6$ **c.** $C'(q) = -15q^2 - 20q + 3$

d. $B'(p) = \dfrac{-p^2 - 4p + 1}{\left(p^2 + 1\right)^2}$

9 $f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x^2 - 1)$
f est décroissante sur [–4 ; –1] et sur [1 ; 3] et f est croissante sur [–1 ; 1].

10 a. $g'(x) = 4x - 12$
b. $g'(0) = -12$ et $g(0) = 1$ d'où T a pour équation $y = -12x + 1$.

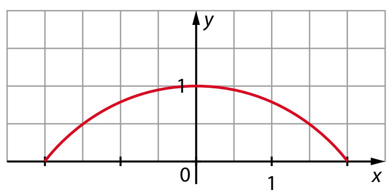
Pour faire le point

98 Réponses A et C.
Le tableau de variations indique que $g(x) = 0$ a trois solutions. Une solution dans l'intervalle [–10 ; –2] donc négative, une solution dans l'intervalle [–2 ; 2] et une dans l'intervalle [2 ; 10] donc positive.
Comme $f(0) = 1$, on peut en déduire qu'une solution se situe dans l'intervalle [0 ; 2] ; cette solution est donc positive. La réponse A est exacte.
À l'aide de la table de valeur de la calculatrice, la fonction f change de signe entre –3,6 et –3,5 donc la réponse C est exacte.

99 Réponses B et D.
L'équation $f(x) = 17$ a deux solutions.
L'équation $f(x) = 18$ a une seule solution dans l'intervalle [2 ; 10] donc la réponse B est exacte.
L'équation $f(x) = 4$ a trois solutions, une dans [–10 ; –2], une dans [–2 , 2] et une dans [2 ; 10].
L'équation $f(x) = -880$ n'a pas de solution car le minimum de la fonction est –879 donc la réponse D est exacte.

100 Réponses B et C.
Si $g'(x) > 0$ sur I, alors g est strictement croissante mais pas forcément positive.
Si le minimum de g sur I est 10, alors toutes les valeurs de $g(x)$ sont supérieures ou égales à 10 et donc positives. La réponse B est exacte.
De même, si le maximum de g est –10 sur I, alors toutes les valeurs de $g(x)$ sont inférieures ou égales à –10 donc négatives. La réponse C est exacte.
Si g est dérivable sur I alors elle est continue. Si elle ne s'annule qu'une seule fois, alors elle ne change pas forcément de signe. Par exemple, la fonction carré s'annule en 0 et ne change pas de signe : la réponse D est fausse.

101 Réponses B, C et D.
La courbe ci-dessous pourrait être celle représentant h.



Les réponses B, C et D sont exactes.

102 Réponses A et B.
Si f est convexe sur I, alors la courbe $\mathscr{C}$ se situe au-dessus de toutes ses tangentes et la fonction dérivée de f est croissante sur I. Les réponses A et B conviennent.

103 Réponse B.
Si f est concave, alors $\mathscr{C}$ se situe au-dessous de toutes ses tangentes, donc la réponse A est fausse. La courbe $\mathscr{C}$ n'admet pas de point d'inflexion, donc la réponse B est exacte. La fonction dérivée de f est décroissante sur I mais les réponses C et D sont fausses.

104 Réponses B et D.
Si $\mathscr{C}$ a un point d'inflexion d'abscisse a, alors elle traverse sa tangente en ce point et la dérivée seconde s'annule en a. Les réponses B et D conviennent.