Chapitre 3 Fonctions exponentielles

Avant de commencer

1 Réponses B et C.
On a $a^2 \times a^{-3} = a^{2-3} = a^{-1}$.
En outre, $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ donc $a^2 \times a^{-3} = \dfrac{a^2}{a^3}$.

2 Réponses A et B.
On a $(a^2)^{-3} = a^{2\times(-3)} = a^{-6}$. De même $(a^{-3})^2 = a^{-3\times 2} = a^{-6}$.

3 Réponses A et D.
On a $\dfrac{a^4 \times a^{-2}}{a^3} = \dfrac{a^2}{a^3} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

4 Réponses B et C.
Le terme général de la suite est $u_n = \dfrac{3}{2^n}$. La raison de la suite est $\dfrac{1}{2}$ et le premier terme est positif donc la suite est décroissante et a pour limite 0.

5 Réponses A, B et C.
La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme 5. Donc $u_n = \dfrac{5}{4^n}$. Puisque $0 < \dfrac{1}{4} < 1$, la suite est décroissante et a pour limite 0.

6 Réponse A.
La suite est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2, avec $2 > 0$. La suite est donc croissante et a pour limite l'infini. On a $u_2 = 18$ et $u_{n+1} = 3u_n$.

7 Réponse B.
La fonction f est un produit de deux fonctions.
Donc $f'(x) = 2x(2x+3) + (x^2 - 1) \times 2 = 6x^2 + 6x - 2$.

8 Réponse D.
La fonction f est un quotient de deux fonctions.
Donc $f'(x) = \dfrac{4(x^2+2) - 4x \times 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-4x^2+8}{(x^2+2)^2}$.

9 Réponse B.
La fonction f est une somme de deux fonctions.
Donc $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

10 2^{2n+3} ; 2^{2n} ; 2^{n+6}.

11 **a.** $u_{n+1} = 2u_n$
b. $u_n = 3 \times 2^n$

12 **a.** f' est définie sur , pour $x \neq 0$, par $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$.
b. g' est définie sur par $g'(x) = 6x^2 - 2x + 4$.
c. h' est définie sur par $h'(x) = \dfrac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$.
d. i' est définie sur $[1\,;+\infty[$ par $i'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

Pour faire le point

126 Réponses B et C.
$2{,}5^{0{,}8} \times 2{,}5^{0{,}4} = 2{,}5^{0{,}8+0{,}4} = 2{,}5^{1{,}2}$
De même, $2{,}5 \times 2{,}5^{0{,}2} = 2{,}5^{1+0{,}2} = 2{,}5^{1{,}2}$.

127 Réponses A et C.
On a $1 - \dfrac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1+e^{-x}-e^{-x}+1}{1+e^{-x}} = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$.

De plus, $\dfrac{2}{1+e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{2e^x}{e^x + e^x \times e^{-x}} = \dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

128 Réponses C et D.
$e^{2x} = (e^x)^2$ donc $e^{2x} - e^x = (e^x)^2 - e^x = e^x(e^x - 1)$.

129 Réponse B.
L'expression $(e^x - 1)(1 - x)$ est un produit de deux facteurs. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(e^x - 1)(1 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'expression $(e^x - 1)(1 - x)$ est positive sur $[0\,;1]$.

130 Réponse A.
L'expression $(e^{-x} - 1)(e^x + 2)$ est un produit de facteurs, avec $e^x + 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$. Elle a donc même signe que $e^{-x} - 1$. On résout donc l'inéquation $e^{-x} - 1 \geqslant 0$ qui équivaut à $e^{-x} \geqslant 1$ ou encore $-x \geqslant 0$.
L'expression $(e^{-x} - 1)(e^x + 2)$ est positive sur $]-\infty\,;0]$.

131 Réponses A et D.
L'inéquation $e^{x+1} \leqslant \dfrac{1}{e^x}$ équivaut à $e^{2x+1} \leqslant 1$. Elle équivaut à $2x + 1 \leqslant 0$ soit $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

132 Réponses B et C.
En multipliant les deux membres de l'équation $e^x + e^{-x} = 2$ par e^x, on obtient l'équation équivalente $e^{2x} + 1 = 2e^x$ soit $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$. En posant $X = e^x$, on obtient l'équation $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui a pour unique solution 1. On résout donc $e^x = 1$ qui a pour unique solution 0.

133 Réponses A et C.
La fonction f est de la forme $x \mapsto q^x$ avec $q = 1{,}25$ et $q > 1$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $-5 > -7$ et f croissante, $f(-5) > f(-7)$. De plus $f(1) = 1{,}25^1 = 1{,}25$. On a $f(2) \times f(-3) = f(-1) \neq f(-6)$.

134 Réponses A, B et C.
La fonction f est de la forme $x \mapsto q^x$ avec $q = 0{,}45$ et $0{,}45 < 1$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\,;0]$. On a $3 > 2$ et f décroissante donc $f(3) < f(2)$. De plus $f(1{,}7) \times f(2{,}1) = f(1{,}7 + 2{,}1) = f(3{,}8)$.

135 Réponses A et C.
La fonction f est un produit de deux fonctions par suite :
$$f'(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x = xe^x.$$
Puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le même signe que x. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$. Ainsi f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
De même, $f''(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$.
Comme $e^x > 0$, $f''(x)$ a le même signe que $x + 1$. Donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe pour $x = -1$. Le point d'abscisse -1 de $\mathscr{C}$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$. De plus, $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;-1[$ et $f''(x) > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$. Donc f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

136 Réponses B et D.
f est une somme de deux fonctions, donc $f'(x) = -2e^{2x} + 2e^x = 2e^x(1 - e^x)$.
Puisque $2e^x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $1 - e^x$. Donc $f'(x)$ est positive sur $]-\infty\,;0]$; ainsi f est croissante sur cet intervalle.
On calcule $f''(x)$: $f''(x) = 2e^x - 4e^{2x} = 2e^x(1 - 2e^x)$.
Pour $x \geqslant 0$ on a $e^x \geqslant 1$ donc $2e^x \geqslant 2 > 1$.
Ainsi $1 - 2e^x < 0$. et donc $f''(x) < 0$ La fonction f est donc concave sur $[0\,;+\infty[$.

137 Réponses A et C.
On a $f'(x) = (2x - 1)\,e^{x^2 - x}$; $f'(x)$ a le même signe que $2x - 1$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.