Chapitre 5 Calcul intégral

Avant de commencer

1 Réponses B, C et D.
La formule de l'aire d'un triangle rectangle permet d'obtenir l'aire de AOB : elle est égale à 4 cm² donc la réponse B est bonne, et la réponse A est fausse.
Le triangle AOD est le symétrique du triangle AOB par rapport à l'axe des ordonnées, donc les aires de ces deux triangles sont égales : la réponse C est donc bonne.
L'aire de ACH est égale à 1 cm² donc l'aire de AOB est égale à $4 \times$ aire (ACH) : la réponse D est donc bonne.

2 Réponses B, C et D.
L'aire du trapèze OACD est égale à la somme de l'aire du rectangle OHCD et du triangle ACH donc l'aire de ce trapèze est égale à 7 cm² : la réponse B est bonne.
La réponse D est bonne puisque l'aire du triangle AOB est égale à 4 cm² et que $\frac{7}{4} \times 4 = 7$.
La réponse C est également bonne, cette réponse correspond à la formule de l'aire d'un trapèze : hauteur $\times \dfrac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2}$.

3 Réponses B et C.
Lorsqu'on change les unités graphiques, les aires en unités d'aire restent identiques donc la réponse B est bonne.
Par contre, les aires en cm² sont changées donc la réponse A est fausse. Avec les unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, l'unité d'aire est égale à 2 cm² donc les aires exprimées en cm² sont doublées par rapport aux aires obtenues dans les questions 1 et 2 avec un repère orthonormé d'unité 1 cm. La réponse C est donc bonne, alors que la réponse D est fausse.

4 Réponses A et D.
Pour répondre à cette question, on peut dériver chacune des fonctions f, g, h, i et j.
On a $f'(x) = 4x$, $g'(x) = 4x$, $h'(x) = 4$, $i'(x) = 4$, et $j'(x) = 2 \times 2x = 4x$; donc seules les fonctions g et j ont la même dérivée que la fonction f, c'est-à-dire que les bonnes réponses sont A et D, les réponses B et C étant fausses.

5 Réponses B et D.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$ est dérivable comme produit de fonctions car $f(x)$ est de la forme $g(x) \times h(x)$ avec $g(x) = x$ et $h(x) = e^{-x}$.
h est de la forme e^u avec $u(x) = -x$ donc $h'(x) = u'(x)\, e^{u(x)} = -e^{-x}$ d'où $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1)\, e^{-x} = (1-x)\, e^{-x}$. Ainsi les réponses A et C sont fausses alors que la réponse D est bonne.
Par ailleurs, $(1-x)\, e^{-x} = \dfrac{1-x}{e^x}$ donc la réponse B est également bonne.

6 Réponse D.
La fonction g est de la forme $4\, e^u$ avec $u(x) = 2x - 1$ donc $g'(x) = 4 \times 2 \times e^{2x-1} = 8\, e^{2x-1}$. Seule la réponse D est bonne.

7 Réponses B et C.
Attention ***Il se peut que l'énoncé du manuel indique par erreur les fonctions f, g, h, i et j définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(4x+3)$, $g(x) = \ln(4x)$, $h(x) = \ln(8x+6)$, $i(x) = \ln\left(x + \frac{3}{4}\right)$ et $j(x) = \ln(4x^2+3)$, fonctions que vous ne savez pour la plupart pas dériver. L'énoncé à utiliser est celui qui donne les fonctions f, g, h, i et j définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(4x)$, $g(x) = 4\ln x$, $h(x) = \ln(8x)$, $i(x) = \ln x$ et $j(x) = \ln(4x^2)$.***

Pour répondre à cette question, on peut dériver chacune des fonctions f, g, h, i et j après avoir utilisé la relation fonctionnelle pour transformer l'écriture de certaines fonctions.
$f(x) = \ln(4x) = \ln 4 + \ln x$ donc $f'(x) = \frac{1}{x}$;
$g'(x) = 4 \times \frac{1}{x}$ donc la réponse A est fausse ;
$h(x) = \ln 8 + \ln x$ donc $h'(x) = f'(x)$ donc la réponse B est bonne ;
$i'(x) = \frac{1}{x}$ donc la réponse C est bonne ;
$j(x) = \ln(4x^2) = \ln 4 + 2\ln x$ donc $j'(x) = 2 \times \frac{1}{x}$ donc la réponse D est fausse.

8 3 carreaux.

9 $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$ et $g'(x) = 2x \times e^{x^2+1}$.

10 $f'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

$g(x) = \dfrac{2 \times \ln x}{x}$ donc $g'(x) = \dfrac{2 \times \frac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{2 \times (1 - \ln x)}{x^2}$

11 $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x-1) \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

$g(x) = \dfrac{3}{x+1} = 3 \times \dfrac{1}{x+1}$ donc $g'(x) = 3 \times \dfrac{-1}{(x+1)^2} = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$

donc $g'(x) = -f'(x)$.

$h(x) = \dfrac{-3}{x+1} = -1 \times \dfrac{3}{x+1} = -1 \times g(x)$ donc $h'(x) = -g'(x)$.

Donc $h'(x) = -\dfrac{-3}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} = f'(x)$.

En effectuant les calculs de dérivée, on trouve donc que les deux fonctions f et h ont la même dérivée.
Par ailleurs on peut remarquer que :
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x+2-3}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 + h(x).$$
Donc $f'(x) = h'(x)$. On peut ainsi répondre à la question posée sans calculer les dérivées.

Pour faire le point

95 Réponse A.
La fonction f est de la forme $u + v$ avec $u(x) = 8x^3$ et $v(x) = -1$ donc une primitive de f est $U + V$ avec $U(x) = 8\,\frac{x^4}{4} = 2x^4$ et $V(x) = -x$ donc les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^4 - x + k$.
On veut $F(1) = 0$ d'où $2 - 1 + k = 0$ d'où $k = -1$. La primitive de f qui s'annule en 1 est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^4 - x - 1$; la seule bonne réponse est la réponse A.

96 Réponses B et D.
Puisque l'expression $f(x)$ contient une exponentielle, on cherche à faire apparaître la forme $u'\, e^u$; ici $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$. On écrit $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x}$ et les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2} \times e^{2x} + k$.
Les réponses B et D sont donc bonnes alors que les réponses A et C ne le sont pas.
On peut aussi calculer les dérivées de toutes les fonctions proposées pour trouver celles qui sont égales à f.

97 Réponse D.
On dérive chacune des fonctions F proposées. Pour la fonction F de la réponse A, on obtient $F'(x) = e^x$; or e^x est différent de $x\,e^x$ donc cette fonction F n'est pas une primitive de f : la réponse A est donc fausse.
De même, pour la fonction F de la réponse B, on obtient :
$$F'(x) = 1 \times e^x + (x+1) \times e^x = (x+2) \times e^x.$$

La réponse B est donc fausse.
Pour la fonction F de la réponse C, on a $F(x) = \frac{x^2e^x}{2} = \frac{1}{2} \times x^2 e^x$ donc $F'(x) = \frac{1}{2} \times (2xe^x + x^2e^x) = \frac{1}{2} \times (2+x)xe^x$ donc $F'(x) \neq xe^x$: la réponse C est donc fausse.
Pour la fonction F de la réponse D, on a
$F'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = (1+x-1) \times e^x = xe^x$. Donc $F'(x) = f(x)$: la réponse D est bonne.

98 **Réponse D.**
Une primitive de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = 2x^2$ est la fonction F définie par $F(x) = 2\frac{x^3}{3}$. L'intégrale est donc égale à $F(1) - F(-1)$; or $F(1) = \frac{2}{3}$ et $F(-1) = -\frac{2}{3}$ donc $\int_{-1}^{1} 2x^2\,dx = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$: seule la réponse D est bonne.

99 **Réponse A.**
Une primitive de la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ est la fonction F définie par $F(x) = x^3 - 2x^2 + x$. L'intégrale est égale à $F(2) - F(0)$; or $F(2) = 2$ et $F(0) = 0$ donc $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)dx = 2 - 0 = 2$.
La réponse A est donc bonne, alors que les réponses B et C sont fausses.
En utilisant les propriétés de linéarité de l'intégrale on obtient :
$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)dx = 3\int_0^2 x^2\,dx + \int_0^2 (-4x+1)dx$ mais ceci n'est pas égal à $\int_0^2 x^2\,dx - \int_0^2 (4x+1)dx$ donc la réponse D est fausse.

100 **Réponses A, B et C.**
On sait que $\frac{3}{t} = 3 \times \frac{1}{t}$ donc, par linéarité de l'intégrale :
$\int_2^4 \frac{3}{t}dt = \int_2^4 \left(3 \times \frac{1}{t}\right)dt = 3 \times \int_2^4 \frac{1}{t}\,dt$, la réponse A est bonne.
La réponse B est également bonne car le nom de la variable d'intégration n'a pas d'importance donc : $\int_2^4 \frac{3}{t}dt = \int_2^4 \frac{3}{x}dx$.
Par ailleurs, une primitive de f définie sur $[2;4]$ par $f(t) = \frac{3}{t}$ est la fonction F définie par $F(t) = 3\ln t$ donc :

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{3}{t}dt &= F(4) - F(2) = 3\ln 4 - 3\ln 2\\ &= 3\ln(2^2) - 3\ln 2 = 6\ln 2 - 3\ln 2 = 3\ln 2.\end{aligned}$$

La réponse C est donc bonne et la réponse D est fausse.

101 **Réponse B.**
Une primitive de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+1}$ est la fonction F définie sur $[-2;4]$ par $F(x) = 2\,e^{\frac{1}{2}x+1}$.
On a $F(4) = 2e^{\frac{1}{2}\times 4+1} = 2e^3$ et $F(-2) = 2e^{\frac{1}{2}\times(-2)+1} = 2e^0 = 2$ donc :
$\int_{-2}^{4} e^{\frac{1}{2}x+1}dx = 2e^3 - 2 = 2(e^3 - 1)$.
La seule bonne réponse est la B

102 **Réponses C et D.**
La fonction f est positive sur $[1;2]$ donc l'aire, en unités d'aire, de la surface colorée est égale à $\int_1^2 e^{-3x+3}dx$; une primitive de la fonction g définie sur $[1;2]$ par $g(x) = e^{-3x+3}$ est la fonction G définie par $G(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+3}$. On a $G(2) = -\frac{1}{3}e^{-3}$ et $G(1) = -\frac{1}{3}$ donc $\int_1^2 e^{-3x+3}dx = -\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(e^{-3} - 1) = \frac{1-e^{-3}}{3}$.
Ainsi la réponse C est bonne alors que les réponses A et B sont fausses.
La réponse D est également bonne puisque la valeur approchée par excès à 0,01 prés de cette aire est égale à 0,32.

103 **Réponses C et D.**
On a $\frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$. Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = x - \frac{1}{x}$.
Pour x supérieur à 1, x est supérieur à $\frac{1}{x}$ donc f est positive : l'aire cherchée est donc égale à $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)dx$. La réponse C est bonne.
Une primitive de la fonction f est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$;
$F(2) = 2 - \ln 2$ et $F(1) = \frac{1}{2}$ donc $A = F(2) - F(1) = \frac{3}{2} - \ln 2$: la réponse D est bonne et les réponses A et B sont fausses.

104 **Réponse B.**
La valeur moyenne de f sur $[-1;2]$ est égale à $\frac{1}{3}\int_{-1}^{3} 3x^2\,dx$.
Or une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $[-1;2]$ par $F(x) = x^3$;
$F(2) = 8$ et $F(-1) = -1$ donc la valeur moyenne est égale à $\frac{1}{3}(8-(-1))$ c'est-à-dire 3 : la réponse B est bonne.