Chapitre 7 Lois de probabilité à densité

Avant de commencer

1 Réponse B.
La somme des probabilités doit être égale à 1.
On a donc $0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}25 + a = 1$ c'est-à-dire $0{,}9 + a = 1$ d'où $a = 0{,}1$.

2 Réponses C et D.
$P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = P(X \leqslant 1) - P(X < -1)\ P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$
$P(-1 \leqslant X \leqslant 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1)$
$= 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}6$

3 Réponse B.
$E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$
$= -2 \times 0{,}3 - 1 \times 0{,}15 + 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}1$
$= -0{,}3$

4 Réponse C.
L'expérience aléatoire consiste à lancer une pièce mal équilibrée. Il y a « succès » quand la pièce tombe sur face. La probabilité de succès p est 0,4. Cette expérience est répétée 5 fois de façon identique et il y a indépendance des résultats. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}4$.

5 Réponses A et D.
$$P(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{5}{2}(0{,}4)^2(0{,}6)^3 = 0{,}3456$$

6 Réponse C.
$E(X) = np = 5 \times 0{,}4 = 2$

7 Il faut que $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$. F définie par $F(x) = \frac{k}{2}e^{2x}$ est une primitive de f sur $[0\,;2]$. On doit avoir $F(2) - F(0) = 1$ c'est-à-dire :
$$\frac{k}{2}e^4 - \frac{k}{2} = 0 \text{ d'où } k = \frac{2}{e^4 - 1}.$$

8 a. Pour tout réel x, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. On sait que pour tout réel X, $e^X > 0$. On a donc, pour tout réel x, $e^{-x^2} > 0$. D'où $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de $-2x$. On en déduit : pour tout réel $x < 0$, $f'(x) > 0$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) < 0$.

b.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

c. $f(x) < 10^{-8}$ équivaut à $e^{-x^2} < 10^{-8}$ soit à $-x^2 < \ln(10^{-8})$ c'est-à-dire à $-x^2 < -8\ln 10$ ou encore à $x^2 - 8\ln 10 > 0$.
$x^2 - 8\ln 10$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $-\sqrt{8\ln(10)}$ et $\sqrt{8\ln(10)}$. D'après la règle vue en Première :
$$S =]-\infty\,; -\sqrt{8\ln(10)}[\ \cup\ ]\sqrt{8\ln(10)}\,; +\infty[\text{ avec } \sqrt{8\ln(10)} \approx 4{,}3.$$

Pour faire le point

91 Réponses B et D.
f est la densité de probabilité de la loi de X, variable aléatoire continue sur $[0\,;1]$.
$P\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right) = P(X \leqslant 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} f(x)\,dx$ par définition de la densité de probabilité. Comme F est la primitive de f qui s'annule en 0, on a $\int_0^{0{,}5} f(x)\,dx = F(0{,}5) - F(0) = F\left(\frac{1}{2}\right)$.

92 Réponses B et C.
Pour tout réel a de $[0\,;1]$: $P(X \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0) = F(a)$ donc puisque $0 \leqslant P(X \leqslant a) \leqslant 1$, on a bien $0 \leqslant F(a) \leqslant 1$.
De plus, $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$.
Si on prend pour f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 2x$, on a $F(x) = x^2$.
f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire X continue sur $[0\,;1]$ mais on a : $f(0,8) \notin [0\,;1]$ et :
$$P\left(X \leqslant \frac{0{,}8}{2}\right) = F(0{,}4) = 0{,}16 \neq \frac{F(0{,}8)}{2} \text{ (car } F(0{,}8) = 0{,}64).$$

93 Réponses A et C.
X suit la loi uniforme sur $[-10\,;20]$.
$$P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10) = 1 - \frac{10-(-10)}{20-(-10)} = 1 - \frac{20}{30} = \frac{1}{3}.$$

94 Réponses B et C.
La fonction densité de probabilité de la loi de X est définie sur $[-10\,;20]$ par $f(x) = \frac{1}{20-(-10)} = \frac{1}{30}$ d'où $E(X) = \int_{-10}^{20} x f(x)\,dx = \int_{-10}^{20} \frac{x}{30}\,dx$.
On a aussi directement $E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{20+(-10)}{2} = 5$.

95 Réponses B et D.
$P(T < -0{,}5) = P(T > 0{,}5)$. Cette propriété est une conséquence de la symétrie de la courbe représentative de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite par rapport à l'axe des ordonnées.
$P(T < -0{,}5) = 0{,}5 - P(-0{,}5 \leqslant T \leqslant 0) \approx 0{,}3085$.

96 Réponse C.
$P(T > k) = 0{,}68$ équivaut à $1 - P(T \leqslant k) = 0{,}68$ c'est-à-dire à $P(T \leqslant k) = 0{,}32$. La calculatrice fournit : $k \approx -0{,}468$.

97 Réponse B.
$P(-a \leqslant T \leqslant a) = 0{,}85$ équivaut à $P(T \leqslant a) - P(T < -a) = 0{,}85$.
Or $P(T < -a) = P(T > a) = 1 - P(T \leqslant a)$.
D'où $P(-a \leqslant T \leqslant a) = 0{,}85$ équivaut à $P(T \leqslant a) - (1 - P(T \leqslant a)) = 0{,}85$ c'est-à-dire à $2P(T \leqslant a) - 1 = 0{,}85$ soit à $P(T \leqslant a) = \frac{1{,}85}{2} = 0{,}925$.
La calculatrice fournit $a \approx 1{,}44$.
Pour les exercices 98 à 100, la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 12$ et $\sigma = 2$ (car $\sigma^2 = 4$).

98 Réponses C et D.
On a $P(8 \leqslant Y \leqslant 11) = P(Y \leqslant 11) - P(Y < 8)$ et la calculatrice fournit directement $P(8 \leqslant Y \leqslant 11) \approx 0{,}286$.

99 Réponses A et D
$P(Y < 12{,}6) = 0{,}5 + P(12 < Y < 12{,}6) \approx 0{,}618$
$P(Y < 12{,}6) = P\left(\frac{Y-12}{2} < \frac{12{,}6-12}{2}\right) = P(T < 0{,}3)$ où T suit la loi normale centrée réduite. De plus :
$$P(T < 0{,}3) = P(T \leqslant 0{,}3). \text{ D'où } P(Y < 12{,}6) = \Phi(0{,}3).$$

100 Réponse C.
$$P(12 - a \leqslant Y \leqslant 12 + a) = P\left(\frac{12-a-12}{2} \leqslant \frac{Y-12}{2} \leqslant \frac{12+a+12}{2}\right)$$
$$= P\left(-\frac{a}{2} \leqslant T \leqslant \frac{a}{2}\right) \text{ où } T \text{ suit } \mathcal{N}(0\,,1)$$
$$P(12 - a \leqslant Y \leqslant 12 + a) = P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right) - P\left(T < \frac{a}{2}\right)$$
$$= P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right) - P\left(T > \frac{a}{2}\right)$$
$$= P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right) - \left(1 - P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right)\right)$$
$$= 2P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right) - 1$$
D'où $P(12 - a \leqslant Y \leqslant 12 + a) = 0{,}99$ équivaut à : $2P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right) - 1 = 0{,}99$ c'est-à-dire à : $P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right) = \frac{1{,}99}{2}$ soit à : $P\left(T \leqslant \frac{a}{2}\right) = 0{,}995$.
La calculatrice fournit $\frac{a}{2} \approx 2{,}5758$ d'où $a \approx 5{,}15$.