Chapitre 4 Logarithmes

Avant de commencer

1 Réponse C.

$x^2 - 1 = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ ou $x = -1$.

On a donc le tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement $x^2 - 1 > 0$ si, et seulement si, $x < -1$ ou $x > 1$.

2 Réponse C.

$e^x > 0$ pour tout x réel (voir le manuel page 66).

3 Réponses A et C.

Si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ alors $f'(x)$ est inférieur ou égal à 0 pour tout x de $\mathbb{R}$.

$x < 3$ si, et seulement si, $f(x) > f(3)$ car f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty\,; 3[$.

4 Réponse D.

$e^x = 1$ équivaut à $e^x = e^0$ soit à $x = 0$.

5 Réponse A.

Voir le manuel page 68.

6 Réponses A et D.

$e^{x+2} = e^{-7}$ est équivalent à :

$$x + 2 = -7 \text{ soit } x = -9.$$

7 Réponses A, B, C et D.

La fonction f telle que $f(x) = e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet : $f''(x) = e^x$ et $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. On peut aussi dire que la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$. La convexité de f se caractérise graphiquement par le fait que $\mathscr{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes.

8 Réponse B.

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ donc :

$$f'(x) = 1 \times e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

$f'(1) = e^1(1 + 1) = 2e$ et $f'(2) = e^2(1 + 2) = 3e^2$.

9 Réponses A et C.

- $g(x) = -\dfrac{1}{2} \times x^2$ donc $g'(x) = -\dfrac{1}{2} \times 2x = -x$

et $g'(-1) = -(-1) = 1$.

- $g(x) = \dfrac{1}{2} \times x^2$ donc $g'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x = x$

et $g'(-1) = -1$.

- $g(x) = -1 \times \dfrac{1}{x}$ donc $g'(x) = -1 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

et $g'(-1) = \dfrac{1}{1^2} = 1$.

- $g(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

et $g'(-1) = \dfrac{-1}{1^2} = -1$.

10 Réponse C.

$$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = e^x \text{ et } v(x) = x.$$

On a : $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.

$$h'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

11 $f(x) = x(x^2 - 2x - 3)$ et les racines du trinôme sont -1 et 3.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$g(x) = \dfrac{x^2 - 4^2}{(x-2)^2}$, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		2		4		$+\infty$
$x^2 - 4^2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

12 $A = \dfrac{e^4 \times e^6}{e^5} = \dfrac{e^{4+6}}{e^5} = e^{10} \times e^{-5} = e^{10-5} = e^5$

$B = \dfrac{e^{2x-2}}{e^{2x+3-2-x}} = \dfrac{e^{2x-2}}{e^{x+1}} = e^{2x-2} \times e^{-x-1} = e^{x-3}$

13 a. T a une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m = f'(0)$.

Or $f'(x) = e^x$ donc $m = 1$.

On a : $f(0) = m \times 0 + p$ et $f(0) = 1$ donc $p = 1$.

Finalement une équation de T est : $y = x + 1$.

b. Les droites (d) et T sont parallèles puisqu'elles ont même coefficient directeur e, donc (d) est au-dessous de T. Comme la fonction exponentielle est convexe, $\mathscr{C}$ est au dessus de T et donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de (d).

14 $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x + 2$.

$$h'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{e^x \times (x+2) - e^x \times 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$$

$k(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (1 - x)$ et $v(x) = e^x$.

$k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -1 \times e^x + (1 - x)e^x$

Finalement $k'(x) = -xe^x$.

Pour faire le point

104 Réponse D.

L'équation $\ln x + \ln(x + 3) = 2\ln 2$ est équivalente à l'équation :

$$\ln(x(x + 3)) = \ln(2^2).$$

On utilise la relation fonctionnelle du logarithme ($\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$ avec $a = x$ et $b = (x + 3)$) et les propriétés qui en découlent ($\ln(a^n) = n\ln a$ avec $a = 2$ et $n = 2$).

L'équation est alors équivalente à : $x(x + 3) = 2^2$ soit :

$$x^2 + 3x = 4 \text{ donc } x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 25$; ses racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

En prenant en compte le fait que l'on résout l'équation sur $]0\,; +\infty[$, on conclut : $S = \{1\}$.

105 Réponse B.

L'inéquation $\ln x + \ln x \leqslant \dfrac{1}{2}\ln 81$ est équivalente à l'inéquation : $\ln(x \times x) \leqslant \ln(\sqrt{81})$, on utilise la relation fonctionnelle de l'exponentielle et les propriétés qui en découlent pour écrire une inégalité entre deux logatithmes.

L'inéquation est alors équivalente à : $x^2 \leqslant 9$ puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,; +\infty[$, soit : $x^2 - 9 \leqslant 0$.

À l'aide du tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

On doit avoir $-3 \leqslant x \leqslant 3$. En prenant en compte le fait que l'on résout l'inéquation sur $]0\,;+\infty[$, on conclut : $S =]0\,;3]$.

106 **Réponses C et D.**

L'inéquation $(\ln x)^2 \leqslant 3\ln x$ est équivalente à l'inéquation :

$$(\ln x)^2 - 3\ln x \leqslant 0 \text{ soit } \ln x\,(\ln x - 3) \leqslant 0\,.$$

Le signe de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ est connu. On étudie le signe de $\ln x - 3$ sur $]0\,;+\infty[$ en résolvant l'inéquation :

$\ln x - 3 > 0$ équivalente à $\ln x > 3$ soit $\ln x > \ln e^3$ et comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$: $x > e^3$. On en déduit le tableau de signe :

x	0		1		e^3		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 3$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement $S = [1\,;e^3]$.

107 **Réponses C et D.**

$\ln 8 + \ln 16 = \ln(2^3) + \ln(2^4) = 3\ln 2 + 4\ln 2 = 7\ln 2$.

- $\ln 24 = \ln(8 \times 3) = \ln 8 + \ln 3 = \ln(2^3) + \ln 3$
  donc $\ln 24 = 3\ln 2 + \ln 3$
- $3\ln 8 = 3\ln(2^3) = 3 \times 3\ln 2 = 9\ln 2$
- $\ln(8 \times 16) = \ln 128 = \ln(2^7) = 7\ln 2$

108 **Réponse C.**

$$\frac{\ln 20}{\ln 10} = \frac{\ln(2\times 10)}{\ln 10} = \frac{\ln 2 + \ln 10}{\ln 10} = \frac{\ln 2}{\ln 10} + \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln 10}.$$

$$\ln 20 - \ln 10 = \ln\left(\frac{20}{10}\right) = \ln 2$$

109 **Réponses C et D.**

L'inéquation $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 0{,}1$ est équivalente à $\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant \ln 0{,}1$ puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. Soit $n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant \ln 0{,}1$.

On sait que $0 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$. Quand on divise de part et d'autre de l'inégalité par $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ il faut donc changer le signe de l'inégalité :

$$n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 2 - \ln 3} \approx 5{,}678$ donc : $n \geqslant 6$.

110 **Réponses B, C et D.**

- $1 - \ln x > 0$ si, et seulement si, $1 > \ln x$ soit $\ln e > \ln x$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, cela revient à $e > x$.
- $\ln x > 0$ si, et seulement si, $\ln x > \ln 1$.

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $x > 1$ et si $x > e$ alors, à fortiori, $x > 1$.

- $\ln x - 1 > 0$ si, et seulement si, $\ln x > 1$ soit $\ln x > \ln e$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, cela revient à $x > e$.
- Si $x > e$ alors $x > 1$ et $\ln x > 0$ donc $\dfrac{1}{\ln x} > 0$.

111 **Réponse D.**

L'inéquation $-x^2\ln x + 9\ln x > 0$ est équivalente à l'inéquation :

$$(9 - x^2)\ln x > 0.$$

On a le tableau de signe :

x	0		1		3		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$9 - x^2$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$(9 - x^2)\ln x$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement $-x^2\ln x + 9\ln x > 0$ si $1 < x < 3$.

112 **Réponses A, B et D.**

Attention ***Il se peut qu'il ne soit indiqué que les réponses A et D dans le manuel, la réponse B est bien aussi une bonne réponse.***

- $f(1) = (1-2) \times \ln 1 = -1 \times 0 = 0$

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (x-2)$ et $v(x) = \ln x$

$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 1 \times \ln x + (x-2) \times \dfrac{1}{x}$

donc $f'(x) = \ln x + \dfrac{(x-2)}{x}$.

- $f''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1 \times x - (x-2) \times 1}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

Si $x > 0$ alors $\dfrac{1}{x} > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$ donc $f''(x) > 0$. On en déduit que f est convexe donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

- La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1) = \ln 1 + \dfrac{(1-2)}{1} = 0 - 1 = -1$. On en déduit que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 n'est pas horizontale.
- $f'(2) = \ln 2 + \dfrac{(2-2)}{2} = \ln 2 + 0 = \ln 2$.

113 **Réponses A et B.**

- $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)} = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \text{ donc :}$$

$$f'(e) = \frac{-1}{e(\ln e)^2} = \frac{-1}{e \times (1)^2} = \frac{-1}{e}.$$

- Pour $x > 1$, on a $x > 0$ donc $\dfrac{-1}{x(\ln x)^2} < 0$, d'où f est décroissante sur $]1\,;+\infty[$.