Chapitre 8 Échantillonnage et estimation

Avant de commencer

1 Réponses A et D.
$p-0{,}5 < p-0{,}4 < p+0{,}4 < p+0{,}5$ donc l'intervalle $[p-0{,}4\,;p+0{,}4]$ est inclus dans l'intervalle $[p-0{,}5\,;p+0{,}5]$.
De même, $p-0{,}8 < p-0{,}4 < p+0{,}4 < p+0{,}8$ donc l'intervalle $[p-0{,}4\,;p+0{,}4]$ est inclus dans l'intervalle $[p-0{,}8\,;p+0{,}8]$.
Les deux autres intervalles sont inclus dans $[p-0{,}4\,;p+0{,}4]$.

2 Réponse D.
L'amplitude de cet intervalle est :
$$\left(f+\frac{1}{10}\right)-\left(f-\frac{1}{10}\right)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

3 Réponse D.
$\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}005$ équivaut à $\sqrt{n} > \dfrac{1}{0{,}005}$ soit $\sqrt{n} > 200$, soit encore $n > 200^2$, soit $n > 40\,000$.
Puisque n est entier, les solutions sont les entiers de l'intervalle $[40\,001\,;+\infty[$.

4 Réponse C.
La calculatrice fournit :
$$P(X \leqslant 14)\approx 0{,}021 \text{ et } P(X \leqslant 15)\approx 0{,}039.$$
Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ est donc 15.

5 Réponse D.
La probabilité de tirer un pion rouge est $\dfrac{30}{100}=0{,}3$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pions rouges dans les échantillons de 100 pions prélevés au hasard et avec remise de la boîte : X suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}3$.
On cherche le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$: la calculatrice donne $P(X \leqslant 20)\approx 0{,}016$ et $P(X \leqslant 21)\approx 0{,}029$. Donc : $a=21$.
On cherche le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$: la calculatrice donne $P(X \leqslant 38)\approx 0{,}966$ et $P(X \leqslant 39)\approx 0{,}979$. Donc : $b=39$.
Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence des pions rouges dans les échantillons de taille 100 est ainsi : $\left[\dfrac{21}{100}\,;\dfrac{39}{100}\right]$, soit $[0{,}21\,;0{,}39]$.

6 Réponse C.
$$P(\mu-1{,}96\,\sigma \leqslant X \leqslant \mu+1{,}96\,\sigma)=P\left(-1{,}96 \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1{,}96\right)$$
$$=P(-1{,}96 \leqslant T \leqslant 1{,}96),$$
où T suit la loi normale centrée réduite. Cette probabilité est donc égale à $2\Phi(1{,}96)-1\approx 0{,}95$.

7 L'inéquation équivaut à $\sqrt{n} > \dfrac{2}{5}\times 10^3$, soit $n > 160\,000$.
Les solutions sont tous les entiers au moins égaux à 160 001.

8 On trouve : $I=[0{,}236\,;0{,}363]$, en arrondissant à 10^{-3} près.
Alors : $P\left(\dfrac{X}{200}\in I\right)=P(47{,}29 < X < 72{,}71)=P(48 \leqslant X \leqslant 72)$
$=P(X \leqslant 72)-P(X \leqslant 47)\approx 0{,}95.$

9 **1.** L'expérience aléatoire « on lance une pièce de monnaie », où le succès est le fait d'obtenir Pile, se répète 200 fois de façon identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0{,}5$.
2. $P(X \leqslant 85)\approx 0{,}020$ et $P(X \leqslant 86)\approx 0{,}028$, d'où $a=86$.
$P(X \leqslant 113)\approx 0{,}972$ et $P(X \leqslant 114)\approx 0{,}980$, d'où $b=114$.
3. Un intervalle de fluctuation est : $\left[\dfrac{86}{200}\,;\,\dfrac{114}{200}\right]$, soit $[0{,}43\,;0{,}57]$.

10 $P(50-1{,}96\,\sigma \leqslant X \leqslant 50+1{,}96\,\sigma)=P(-1{,}96 \leqslant T \leqslant 1{,}96)$,
où T suit la loi normale centrée réduite. Avec la calculatrice, on obtient, à 10^{-3} près : 0,950.

Pour faire le point

65 Réponse C.
La probabilité d'obtenir une fille est :
$$p=\frac{880}{1530}.$$
Un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des filles dans les groupes de taille 50 est :
$$\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{50}}\,;p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{50}}\right].$$
$$p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{50}}\approx 0{,}438 \text{ et } p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{50}}\approx 0{,}712.$$
La réponse est donc, après arrondis : $[0{,}43\,;0{,}72]$.

66 Réponse B.
La probabilité d'obtenir un garçon est :
$$p'=\frac{650}{1530}.$$
Un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des garçons dans les groupes de taille 100 est :
$$\left[p'-1{,}96\frac{\sqrt{p'(1-p')}}{\sqrt{100}}\,;p'+1{,}96\frac{\sqrt{p'(1-p')}}{\sqrt{100}}\right].$$
$$p'-1{,}96\frac{\sqrt{p'(1-p')}}{\sqrt{100}}\approx 0{,}328 \text{ et } p'+1{,}96\frac{\sqrt{p'(1-p')}}{\sqrt{100}}\approx 0{,}522.$$
La réponse est donc, après arrondis : $[0{,}32\,;0{,}53]$.

67 Réponse D.
Un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion des ménages français possédant une connexion internet dans les échantillons de taille 500 est :
$$\left[0{,}8-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{500}}\,;0{,}8+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{500}}\right]\approx[0{,}7649\,;0{,}8351].$$
Un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion des ménages français ayant une tablette tactile dans les échantillons de taille 500 est :
$$\left[0{,}06-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times 0{,}94}}{\sqrt{500}}\,;0{,}06+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times 0{,}94}}{\sqrt{500}}\right]\approx[0{,}039\,;0{,}081].$$
La fréquence observée des ménages ayant une connexion internet est $f=\dfrac{418}{500}=0{,}836$. La fréquence observée des ménages ayant une tablette tactile est $f'=\dfrac{22}{500}=0{,}044$.
$f\notin[0{,}76\,;0{,}84]$ et $f'\in[0{,}039\,;0{,}081]$, donc on refuse (H) et on accepte (H').

68 Réponse B.
Puisque $f=0{,}31$, un intervalle de confiance au niveau 0,95 de la proportion des personnes n'ayant pas de religion dans la population est :
$$\left[0{,}31-\frac{1}{\sqrt{200}}\,;0{,}31+\frac{1}{\sqrt{200}}\right]\approx[0{,}23\,;0{,}39].$$

69 Réponse C.
Si on interroge n personnes, un intervalle de confiance au niveau 0,95 est $\left[0{,}31-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;0{,}31+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$: l'amplitude de cet intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
Celle-ci ne dépasse pas 0,05 si $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $0{,}05\sqrt{n} \geqslant 2$, soit $\sqrt{n} \geqslant \dfrac{2}{0{,}05}$, soit $\sqrt{n} \geqslant 40$, et ainsi : $n \geqslant 40^2$, soit $n \geqslant 1\,600$.

70 Réponse D.
On peut donner un intervalle de confiance de p au seuil 0,95, mais on ne peut pas donner un intervalle dans lequel on est certain que p se trouve. La seule réponse correcte est donc : $p \leqslant 1$.