Chapitre 3 – Le second degré

Réactiver les savoirs, page 54

Savoir résoudre des équations ou des inéquations

1. Réponse C. $2\,x^2 - 8\,x = 0$ équivaut à $2\,x \times x - 2\,x \times 4 = 0$, ce qui équivaut à $2\,x\,(x-4) = 0$, ce qui équivaut à $2\,x = 0$ ou $x - 4 = 0$, ce qui équivaut à $x = 0$ ou $x = 4$.

2. Réponse B.
$(x-5)^2 = 16$ équivaut à $(x-5)^2 - 16 = 0$, ce qui équivaut à $(x-5)^2 - 4^2 = 0$, ce qui équivaut à $(x-5-4)(x-5+4) = 0$, ce qui équivaut à $(x-9)(x-1) = 0$, ce qui équivaut à $x - 9 = 0$ ou $x - 1 = 0$, ce qui équivaut à $x = 9$ ou $x = 1$.

3. Réponse A.
$x^2 \leq 4$ équivaut à $x^2 - 4 \leq 0$, ce qui équivaut à $x^2 - 2^2 \leq 0$, ce qui équivaut à $(x-2)(x+2) \leq 0$.
Or $(x-2)(x+2)$ s'annule en $x = -2$ et en $x = 2$.
On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La lecture du tableau donne S = $[-2\,;\,2]$.

4. Réponse C.
$(x+6)(2-x)$ s'annule en $x = -6$ et en $x = 2$.
On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+6)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La lecture du tableau donne S = $]-\infty\,;\,-6] \cup [2\,;\,+\infty[$.

Utiliser les propriétés algébriques

5. $(x+4)^2 = x^2 + 8\,x + 16$

6. $12\,x = 2 \times x \times 6$.
$(x+6)^2 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 + 12\,x + 36$.

7. $(x+3)^2 = x^2 + 6\,x + 9$ donc $x^2 + 6\,x + 25 = x^2 + 6\,x + 9 + 16 = (x+3)^2 + 16$.

8. $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$.

9. $(x-2)^2 - 9 = (x-2)^2 - 3^2 = (x-2-3)(x-2+3) = (x-5)(x+1)$.

10. Dans le manuel, il faut lire : $(x+4)^2 - 25$.
$(x+4)^2 - 25 = (x+4)^2 - 5^2 = (x-4-5)(x-4+5) = (x-9)(x+1)$.

Déterminer les variations d'une fonction polynôme du second degré

11. Faux. Le coefficient de x^2 est égal à -1, qui est strictement négatif. Donc les variations sont opposées à celles proposées.

12. Vrai. Le coefficient de x^2 est égal à 4, qui est strictement positif. Donc *f* est d'abord décroissante et ensuite croissante : elle admet donc un minimum.

13. Faux. Le coefficient de x^2 est égal à -2, qui est strictement négatif. Donc les variations sont opposées à celles proposées mais on a bien $f(4) = 1$.

Faire le point, page 72

Résoudre une équation du second degré

1. Réponse A.
Le discriminant Δ vaut $(-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 49$. Donc Δ > 0. Donc l'équation a deux solutions.

2. Réponse C.
$(2\,x + 1)^2 - 7\,x^2 = -9\,x + 5$ équivaut à $4\,x^2 + 4\,x + 1 - 7\,x^2 = -9\,x + 5$,
ce qui équivaut à $-3\,x^2 + 4\,x + 1 = -9\,x + 5$,
ce qui équivaut à $-3\,x^2 + 13\,x - 4 = 0$.
Le discriminant Δ vaut $13^2 - 4 \times (-3) \times (-4) = 121$.
Donc Δ > 0. Donc l'équation a deux solutions.

3. Réponse D.
Le discriminant Δ vaut $b^2 - 4 \times 2 \times (-15) = b^2 + 120$. Or pour tout b, on a $b^2 + 120 > 0$. Donc, pour tout b, l'équation a deux solutions.

Factoriser un polynôme du second degré

4. Réponse D.
$10\,x^2 + 10\,x - 60 = 0$ équivaut à $x = -3$ ou $x = 2$.
Donc $10\,x^2 + 10\,x - 60 = 10\,(x - 2)\big(x - (-3)\big) = 10\,(x - 2)(x + 3)$.

5. Réponses B, C et D.
$-3\,x^2 + 7\,x + 40 = 0$ équivaut à $x = -\frac{8}{3}$ ou $x = 5$.
Donc $-3\,x^2 + 7\,x + 40 = -3\left(x - \left(-\frac{8}{3}\right)\right)(x - 5) = -3\left(x + \frac{8}{3}\right)(x - 5)$.
De plus, $-3\left(x + \frac{8}{3}\right)(x - 5) = \left[-3 \times \left(x + \frac{8}{3}\right)\right](x - 5) = (-3\,x - 8)(x - 5)$
et $-3\left(x + \frac{8}{3}\right)(x - 5) = \left(x + \frac{8}{3}\right)[-3 \times (x - 5)] = (x + \frac{8}{3})(-3\,x + 15)$.

Résoudre des inéquations du second degré

6. Réponse B.
$3\,x^2 + 9\,x + 6 = 0$ équivaut à $x = -2$ ou $x = -1$.
De plus, le coefficient de x^2 est égal à 3, qui est strictement positif. Donc $3\,x^2 + 5\,x + 2$ est strictement positif à l'extérieur de l'intervalle de ses racines.
Donc S = $]-\infty\,; -2] \cup [-1; +\infty[$.

7. Réponse C.
$-x^2 + 3\,x + 40 = 0$ équivaut à $x = -5$ ou $x = 8$.
De plus, le coefficient de x^2 est égal à -1, qui est strictement négatif. Donc $-x^2 + 3\,x + 40$ est positif à l'intérieur de l'intervalle de ses racines.

Étudier une fonction polynôme du second degré

8. Réponses A et D.
Le discriminant Δ vaut $7^2 - 4 \times 4 \times (-36) = 625$. Donc Δ > 0.
Donc l'équation $4\,x^2 + 7\,x - 36 = 0$ a deux solutions. Donc la parabole coupe l'axe des abscisses en deux points distincts. De plus, la parabole coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,; -36)$.

9. Réponse A.
Le coefficient de x^2 est égal à -1, qui est strictement négatif. Donc f est d'abord croissante et ensuite décroissante : elle admet donc un maximum. Ce maximum est atteint en $x = -\frac{-4}{2 \times (-1)} = -2$ et vaut $f(-2) = 10$.

10. Réponses A et B.
Le coefficient de x^2 est égal à 1, qui est strictement positif. Donc *f* est d'abord décroissante et ensuite croissante.
Or $= -\frac{-2}{2 \times 1} = 1$. Donc f est croissante sur [1 ; + ∞[.
Par conséquent (comme [4 ; + ∞[est inclus dans [1 ; + ∞[), f est croissante sur [4 ; + ∞[.