Chapitre 8 – Probabilités : variables aléatoires

Réactiver les savoirs, page 186

Dénombrer

1. **Réponse D**. Quand on tire deux boules successivement dans un sac contenant 5 boules en remettant la première boule tirée dans le sac, on a 5 choix possibles pour le premier tirage, et pour chacun de ces 5 choix, on a encore 5 choix possibles pour le tirage de la seconde boule.
   5 × 5 = 25. Il y a donc 25 tirages distincts possibles.

2. **Réponse C.** Dans cet exercice, on ne remet pas la seconde boule tirée dans le sac. Il y a toujours 5 choix possibles pour le tirage de la première boule, mais pour chacun de ces 5 choix, il n'y a plus que 4 choix possibles pour le tirage de la seconde boule (les 5 boules du sac moins la boule déjà tirée).
   5 × 4 = 20. Il y a donc dans ce cas 20 tirages distincts possibles.

Calculer une probabilité r

3. **Faux.** Puisqu'on choisit au hasard un élève de la classe, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.
   Il y a 12 garçons et 29 élèves au total.
   Donc la probabilité de choisir un garçon est $\frac{12}{29}$, qui est différent de $\frac{1}{12}$.
4. **Faux.** Notons *p* la probabilité de sortie de la face numérotée « 6 ». La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1, donc : 0,1+0,1+0 ,1+0,2+0,2+*p* = 1. D'où *p*=1-7=0,3.

5. **Faux.** Lorsque l'on tape un code au hasard, on a dix possibilités pour le premier chiffre. Pour chacune de ces possibilités, on a encore dix choix pour le second chiffre, etc.
   Au total, on a donc 10 000 codes possibles. Le code étant tapé au hasard, la probabilité d'avoir le bon est donc $\frac{1}{10\,000}$.

6. **Faux.** On a au total quatre issues possibles : PP, PF, FP, FF, en notant P pour « pile » et F pour « face ».
   La pièce étant bien équilibrée, la probabilité d'obtenir deux côtés « pile » est donc $\frac{1}{4}$.

Utiliser les propriétés des probabilités

7. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}8$.

8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}1$ donc $P(A \cup B) = 0{,}8$.

9. La probabilité de l'évènement « obtenir un nombre impair » est 0,6. La probabilité recherchée est celle de l'évènement contraire, donc elle est égale à 1-0,6, soit 0,4.

10. Il y a 4 as et 13 piques, dont l'as de pique. Il y a ainsi 16 cartes qui sont soit du pique, soit un as.
    La probabilité demandée est donc $\frac{16}{52}$, soit $\frac{4}{13}$.

Faire le point, page 204

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire

1. Réponse C. Si on obtient deux côtés « Pile », alors on gagne 4 €. Si on obtient un côté « Pile » et un côté « Face », alors on gagne 1 €. Si on obtient deux côtés « Face », alors on perd 2 €.
L'ensemble des valeurs prises par G est donc {-2 ; 1 ; 4} **().**

2. Réponse A. L'évènement « $G = 4$ » est réalisé lorsqu'on tire deux côtés « Pile ». Il y a quatre issues distinctes possibles (2×2). Pour obtenir deux côtés « Pile », on n'a qu'une possibilité.
Les pièces étant bien équilibrées, on fait l'hypothèse d'équiprobabilité des quatre issues, d'où :
$P\,(G = 4) = \frac{1}{4}$.

Utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire

3. Réponse C. La somme des probabilités $P(N = n_i)$ est égale à 1, soit :
$0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}09 + 0{,}13 + 0{,}20 + a + 0{,}16 + 0{,}08 + 0{,}04 = 1$.
On en déduit : $a + 0{,}81 = 1$, donc $a = 0{,}19$.

4. Réponse C.$P(N<5) = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4) = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}20$.

5. Réponses A et D. La probabilité qu'un message soit commenté plus de huit fois en 10 minutes est :
$P(N > 8) = P(N = 9) + P(N = 10) = 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}12$

Déterminer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire

6. Réponse B. $E(X) = -1 \times 0{,}4 + 1{,}1 \times 0{,}2 + 3{,}5 \times 0{,}4 = 1{,}22$.

7. Réponse C. $E(Y) = -2 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}6 + a \times 0{,}1 = 0{,}1a - 0{,}6$.
Ainsi, $E(\mathrm{X}) = 0$ si $0{,}1\mathrm{a} = 0{,}6$, donc si $a = \frac{0{,}6}{0{,}1} = 6$.