Chapitre 5 – Applications de la dérivation

Réactiver les savoirs, page 106

Déterminer le signe d'une expression

1. **Réponses C et D.** $-3x + 6$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -3$ négatif et $b = 6$; $-3x + 6$ est donc positif sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et négatif sur $[2\ ;+\infty[$; la réponse D est donc bonne et la réponse B fausse ainsi que la réponse A car $-3x$ change de signe lorsque $x = 0$ et non lorsque $x = 2$. la réponse C est juste car $-3x + 6 = 3(-x + 2) = 3(2 - x)$.
2. **Réponses B et C.** $x^2 + 3x + 2$ est un polynôme du second degré qui admet deux racines : -1 et -2. Il est donc du signe de $a = 1$, c'est-à-dire positif à l'extérieur de l'intervalle des racines et négatif à l'intérieur de l'intervalle des racines. La réponse A ne peut donc pas convenir. La réponse D ne convient pas car $3x + 2$ est par exemple négatif pour $x = -3$, ce qui n'est pas le cas de $x^2 + 3x + 2$.
3. **Réponses B et C.** $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$; cette expression est négative sur $]-\infty;-2]$, positive sur $[-2\ ;\ 2]$ et négative sur $[2\ ;+\infty[$; les réponses A et D sont donc fausses ; les réponses C et B sont vraies car $2 + x$ est positif sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Utiliser une représentation graphique

4. **Faux.** f est négative, mais croissante.
5. **Vrai.**
6. **Vrai.** $f'(3)$ est la pente de la tangente (la droite (T_2)) au point d'abscisse 3.
7. **Faux.** $f'(2)$ est la pente de la tangente au point d'abscisse 2. Cette tangente est horizontale (c'est l'axe des abscisses). Ainsi $f'(2) = 0$.
8. **Vrai.** $f'(0)$ est la pente de la tangente au point d'abscisse 0 (la droite (T_1)). On peut lire la pente ou la calculer à partir des coordonnées de deux points situés sur cette droite.
9. **Faux.** Le minimum de f est $-2{,}5$, il est atteint pour $x = -4{,}5$.
10. **Faux.** Le maximum de f est 4, il est atteint pour $x = -2$.
11. **Faux.** On a vu, dans la question 8, que la pente de (T_1) est $f'(0) = -1{,}5$; son équation est donc $y = -1{,}5x + 2$.
12. **Vrai.** Sur $[-4\ ;\ 4{,}5]$, la courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses.

Calculer une dérivée

13. f est de la forme $u+v$ avec $u(x) = -x^2$ et $v(x) = 3x+7$. On a $u'(x) = -2x$ et $v'(x) = 3$.
Ainsi $f'(x) = -2x + 3$.

14. g est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 3x+2$ et $v(x) = x^2+1$. On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$.
Ainsi $g'(x) = 3(x^2+1) + (3x+2)\,2x$. Soit $g'(x) = 9x^2+4x+3$.

15. h est de la forme u^2 avec $u(x) = x^3+3$ et $u'(x) = 3x^2$. Ainsi $h'(x) = 2\times(3x^2)(x^3+3)$ soit $h'(x) = 6x^2(x^3+3)$.

16. k est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = x+1$. On a $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$.
Ainsi $k'(x) = \dfrac{3(x+1) - (3x)\times 1}{(x+1)^2}$, soit $k'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Faire le point, page 122

Passer du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

1. Réponses B, C et D. La réponse A est fausse, car au point d'abscisse 2 la courbe est décroissante, donc $f'(2) < 0$. Sur $[-2 ; 1[$, la courbe est strictement croissante, donc $f'(x) > 0$. Les réponses B et D sont donc justes. De plus, $f'(-1) > 0$ donc la réponse C est elle aussi juste.

2. Réponses A et D. f est croissante sur $[-2 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; 4]$, donc $f'(x)$ est positif sur $[-2 ; 1]$ et négatif sur $[1 ; 4]$.

3. Réponses D. Voir question précédente.

Étudier les variations et les extremums d'une fonction

4. Réponse D. $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$.
$f'(x)$ est négatif sur $]-\infty;0]$, positif sur $[0 ; 2]$ et négatif sur $[2 ; +\infty[$. Donc f est décroissante sur $]-\infty;0]$, croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$. La seule bonne réponse est donc D puisque, de plus, la fonction k est décroissante sur **R**.

5. Réponses B, C et D. $g'(x) = 1-\dfrac{16}{x^2} = \dfrac{x^2-16}{x^2} = \dfrac{(x-4)(x+4)}{x^2}$.

Sur $[0 ; +\infty[$, $(x+4)$ et x^2 sont positif, le signe de $g'(x)$ est le signe de $(x-4)$. Ainsi, $g'(x)$ est négatif sur $[0 ; 4]$ et positif sur $[4 ; +\infty[$. Donc g est décroissante sur $[0 ; 4]$ et croissante sur $[4 ; +\infty[$; elle admet un minimum en $x = 4$, ce minimum est $g(4) = 8$.

6. Réponses B et D. $h'(x) = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$. Sur $[4 ; 20]$, $h'(x)$ est négatif, donc h est décroissante.

Ainsi, h admet un minimum en $x = 20$, et un maximum en $x = 4$, ce maximum est $h(4) = 9$.

Obtenir des inégalités

7. Réponses A et D. On a le tableau :

x	-2		-1		0		2		3
$f(x)$	-16	$\nearrow$	$-13{,}5$	$\searrow$	-14	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$26{,}5$

On peut voir que les réponses A et D sont justes et que la réponse B est fausse.
La réponse C est fausse, car quand $-1 \leq x \leq 2$, on a $-14 \leq f(x) \leq 0$.

8. Réponses A, B et C.
- $x^3 + 1{,}5x^2 - 14 \leq 0$ équivaut à $f(x) \leq 0$
- $2x^3 + 3x^2 - 28 \leq 0$ équivaut à $2\times f(x) \leq 0$ donc à $f(x) \leq 0$
- $x^3 \leq -1{,}5x^2 + 14$ équivaut à $f(x) \leq 0$

Comme sur $[-2 ; 2]$ on a bien $f(x) \leq 0$, toute ces affirmations sont donc vraies.
- $x^3 + 1{,}5x^2 \geq 14$ équivaut à $f(x) \geq 0$, ce qui est faux sur $[0 ; 3]$.