Chapitre 4 – Dérivation

Réactiver les savoirs, page 80

Déterminer le coefficient directeur d'une droite

1. Faux. La droite d'équation $y = 5 - x$ (ou $y = -x + 5$) a pour ordonnée à l'origine 5. Mais son coefficient directeur est égal à – 1.

2. Vrai. Une droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation de la forme $y = b$ (avec b un réel), et donc de la forme $y = 0x + b$: son coefficient directeur est égal à 0.

3. Faux. La droite d'équation $y = -2$ (ou $y = 0x - 2$) a pour ordonnée à l'origine – 2. Mais son coefficient directeur est égal à 0.

4. Faux. Le coefficient directeur de la droite (MN) est : $\dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{-4-5}{2-(-1)} = -3$.

5. Vrai. Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Donc toute droite parallèle à (EF) a pour coefficient directeur le coefficient directeur de (EF), c'est-à-dire : $\dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{7-11}{3-2} = -4$.

Tracer une droite et en déterminer une équation

Voir manuel page 284.

Calculer l'image d'un nombre par une fonction

10. Réponse A. $f(5) = -2\times 5 + 3 = -7$.
- $f(-1) = -2\times(-1) + 3 = 5$: la réponse B est fausse.
- $f(5 + h) = -2(5 + h) + 3 = -10 - 2h + 3 = -7 - 2h$: la réponse C est juste.
- $f(-2 + h) = -2(-2 + h) + 3 = 4 - 2h + 3 = 7 - 2h$: la réponse D est fausse.

11. Réponse D. $f(-1) = (-1)^2 = 1$.
- $f(0,1) = (0,1)^2 = 0,01$: la réponse B est fausse.
- $f(1 + h) = (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2$: la réponse C est fausse.
- $f(-1 + h) = (-1 + h)^2 = (h - 1)^2 = h^2 - 2h + 1 = 1 - 2h + h^2$.

12. Réponse A. $f(0) = \dfrac{1}{0-1} = -1$.

- Pour $x = 1$, le dénominateur s'annule : $f(1)$ n'existe pas.
La réponse B est fausse.

Réponse C. $f(1 + h) = \dfrac{1}{1+h-1} = \dfrac{1}{h}$.

- $f(2 + h) = \dfrac{1}{2+h-1} = \dfrac{1}{1+h}$: la réponse D est fausse.

Faire le point, page 98

Associer un nombre dérivé et la tangente

1. - Par lecture graphique, on détermine que la tangente à C_f au point A d'abscisse 2 a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ (à partir du point A, on « se déplace » de deux unités vers la droite et d'une unité vers le bas). Donc $f'(2) = -\frac{1}{2}$: les réponses A et B sont fausses.

- Réponse C.. Par lecture graphique, on détermine que la tangente à C_f au point B d'abscisse 6 a pour coefficient directeur $\frac{3}{2}$ (à partir du point B, on « se déplace » de deux unités vers la droite et de trois unités vers le haut).

Donc $f'(6) = \frac{3}{2}$: la réponse C est juste et la réponse D est fausse.

2. La tangente à C_f au point A(2 ; 0) a pour coefficient directeur – 0,5.
Réponse D.. La droite d'équation $y = -0{,}5x + 1$ a pour coefficient directeur – 0,5 et passe par le point A (car $-0{,}5\times 2 + 1 = 0$).
- La droite d'équation $y = -2x + 1$ n'a pas pour coefficient directeur – 0,5 : la réponse A est fausse.
- La droite d'équation $y = -x + 2$ n'a pas pour coefficient directeur – 0,5 : la réponse C est fausse.
- La droite d'équation $y = -0{,}5x + 2$ a pour coefficient directeur – 0,5, mais elle ne passe pas par le point A (car $-0{,}5\times 2 + 2 = 1$ et $1 \neq 0$) : la réponse B est fausse.

3. $g(-1) = 0$ donc la tangente (T) à C_g au point d'abscisse – 1 passe par le point de coordonnées (– 1 ; 0). Et $g'(-1) = 3$ donc (T) a pour coefficient directeur 3.
Réponse C.. La droite d'équation $y = 3x + 3$ a pour coefficient directeur 3 et passe par le point (– 1 ; 0) (car $3\times(-1) + 3 = 0$) :
- Les droites d'équations respectives $y = 3$ et $y = 0$ n'ont pas pour coefficient directeur 3 (leur coefficient directeur est 0) : les réponses A et D sont fausses.
- La droite d'équation $y = 3x$ a pour coefficient directeur 3, mais elle ne passe pas par le point (– 1 ; 0) (car $3\times(-1) \neq 0$) : la réponse B est fausse.

4. Réponses B et D. La tangente à C_g au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 4x - 5$.
Son coefficient directeur est donc égal à 4.
Par conséquent $g'(1) = 4$: la réponse C est fausse et la réponse D est juste.
Pour $x = 1$: $4\times 1 - 5 = -1$. Donc le point de la tangente d'abscisse 1 a pour ordonnée – 1.
Ce point est le point de contact avec C_g donc $g(1) = -1$. La réponse B est juste et la réponse A est fausse.

Utiliser les dérivées des fonctions usuelles

5. Réponse A. $f'(x) = 3x^2$
$f'(-2) = 3\times(-2)^2 = 12$.
$f'(2) = 3\times 2^2 = 12$: la réponse B est fausse.
La tangente (T) a pour coefficient directeur $f'(2)$, c'est-à-dire 12, et passe par le point A de coordonnées $(2 ; 2^3)$, c'est-à-dire (2 ; 8).
La droite d'équation $y = 12x$ a pour coefficient directeur 12, mais elle ne passe pas par le point A (car $12\times 2 \neq 8$) : la réponse C est fausse.

La droite qui passe par le point A de (T) et par l'origine du repère a pour coefficient directeur : $\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{8}{2} = 4$, ce n'est pas (T) (qui a pour coefficient directeur 12) : la réponse D est fausse.

6. Réponses B et C. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$f'(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$: la réponse A est fausse.

$f'(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{(\frac{1}{3})^2} = -\frac{1}{\frac{1}{9}} = -9$: la réponse B est juste.

La tangente (T) a pour coefficient directeur $f'(2)$, c'est-à-dire – 0,25. Elle n'est donc pas parallèle à l'axe des abscisses : la réponse D est fausse.

La tangente (T) a pour coefficient directeur – 0,25 et passe par le point de coordonnées (2 ; 0,5).
La droite d'équation y = – 0,25x + 1 a pour coefficient directeur – 0,25 et passe par le point de coordonnées (2 ; 0,5) (car $-0{,}25 \times 2 + 1 = 0{,}5$) : la réponse C est juste.

7. Réponses B et C. Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$: la réponse A est fausse.

$f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{2\times 3} = \dfrac{1}{6}$: la réponse B est juste.

La tangente (T) a pour coefficient directeur $f'(2)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$: la réponse C est juste.

La droite qui passe par le point A(2 ; $\sqrt{2}$) de (T) et par l'origine du repère a pour coefficient directeur :
$\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Or $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, donc cette droite n'est pas (T): la réponse D est fausse.

Calculer la dérivée d'une fonction

8. Réponse A. Si $f(x) = 2(x^3 - 3x + 1)$, alors $f'(x) = 2(3x^2 - 3) = 6x^2 - 6$.

9. Réponses B et C. Si $f(x) = (3x-5)^2$, alors $f'(x) = 2\times 3(3x-5) = 6(3x-5) = 18x - 30$.

10. Réponse A. Si $f(x) = \dfrac{3-x}{1+5x}$, alors $f'(x) = \dfrac{-1(1+5x)-(3-x)\times 5}{(1+5x)^2} = \dfrac{-1-5x-15+5x}{(1+5x)^2} = \dfrac{-16}{(1+5x)^2}$.