Chapitre 2 – Étude de fonctions

Réactiver les savoirs, p. 34

Utiliser la représentation graphique d’une fonction

QCM :

1. Réponse C :
$f(2)$ est égal à 1, car le point d’abscisse 2 de la représentation graphique de f a pour ordonnée 1.

2. Réponses A et D :
$f(3) = 2$ et $f(5) = 2$, donc –3 et 5 sont bien des antécédents de 2 par f.
0 n’en est pas un, car $f(0) = 1$ et 1 non plus car $f(1) = 3$.

3. Réponse C :
La représentation graphique de f coupe l’axe des abscisses en deux points, d’abscisses –1 et 3 : l’équation $f(x) = 0$ a donc deux solutions, les réels –1 et 3.

4. Réponse D.
Pour résoudre l’inéquation $f(x) < 1$, on recherche les points de la courbe de f situés strictement au-dessous de la droite horizontale d’équation y = 1 : ces points ont une abscisse comprise entre –2 et 0, ou une abscisse comprise entre 2 et 4. Les bornes de ces intervalles ne sont pas comprises car, en ces bornes, $f(x)$ vaut 1.
Donc, l’ensemble des solutions est la réunion des intervalles] –4 ; 0[et]2 ; 4[.

5. Réponses B et D.
La fonction f n’est pas croissante sur [0 ; 2], car elle est croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; 2].
Elle est bien croissante sur [3 ; 5] et sur [–1 ; 1].
Elle n’est pas croissante sur [–1 ; 5], car elle est croissante sur [–1 ; 1], décroissante sur [1 ; 3] et croissante sur [3 ; 5].

Utiliser les variations d’une fonction

Vrai ou Faux ?

6. Faux :
En effet, elle peut être d’abord décroissante, puis croissante.
Contre-exemple : $f(x) = x^2$. La fonction f n’est pas croissante sur [–1 ; 1], et pourtant elle n’est pas décroissante sur cet intervalle.

7. Faux :

Contre-exemple : soit f définie sur [–2 ; 0] par $f(x) = x^2$. Cette fonction est positive sur [–2 ; 0], mais elle n'est pas croissante sur [–2 ; 0].

8. Vrai :
–5 et –4 appartiennent à l'intervalle]- ∞ ; 0], et –5 < –4. Puisque f est décroissante sur cet intervalle, on a bien $f(–5) \geq f(–4)$.

9. Faux :
g est une fonction polynôme du second degré de la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a = 2$, $b = –8$, c = 11. On a : $-\dfrac{b}{2a} = 2$. Puisque a est positif, g est décroissante sur]- ∞ ; 2] et croissante sur [2 ; + ∞[.
Donc, la fonction g n'est pas croissante sur [0 ; + ∞[: elle est décroissante sur [0 ; 2], et croissante sur [2 ; + ∞[.

10. Faux :
0 est compris entre –2 et 3 et $h(0) = 0$, ce qui contredit l'encadrement $4 \leq h(a) \leq 9$.
Le bon encadrement est : $0 \leq h(a) \leq 9$.

Connaître les fonctions de référence

Exercices :

Voir manuel, page 374.

Pour faire le point, p. 52

Utiliser le sens de variation des fonctions pour encadrer

1. Réponse A :
On opère par disjonction des cas :
- si $-3 < x \leq 0$, alors $0^2 \leq x^2 < (-3)^2$, car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, ce qui donne $0 \leq x^2 < 9$.
- si $0 \leq x < 5$, alors $0^2 \leq x^2 < 5^2$, car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, ce qui donne $0 \leq x^2 < 25$.
Ainsi, si $-3 < x < 5$, alors $0 \leq x^2 < 25$.

2. Réponses B et D :
La réponse A est fausse, car, si $0 < x < 0{,}5$, alors $-5 < f(x) < -1$.
La réponse B est correcte.
La réponse C est fausse, car si $x \in [-1\ ;\ 1]$, alors $-5 \leq f(x) \leq -1$.
La réponse D est correcte, car $f(x) \leq -1$ pour tout x de $[-1\ ;\ 1]$, donc $f(x)$ est négatif sur cet intervalle.

3. Réponse D :
On opère par disjonction des cas :
- si $-3 < x \leq 0$, alors $0 \leq |x| < 3$, car la fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
- si $0 \leq x < 5$, alors $0 \leq |x| < 5$, car $|x| = x$ sur cet intervalle.
Ainsi, si $-3 < x < 5$, alors $0 \leq |x| < 5$.

4. Réponses A et C :
La réponse A est correcte, car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Puisque $a < b$, alors $-a > -b$ et $3 - a > 3 - b$, d'où : $\sqrt{3-a} > \sqrt{3-b}$: la réponse B est fausse.
Puisque $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, alors $\frac{1}{\sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{b}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{a}} < -\frac{1}{\sqrt{b}}$: la réponse C est correcte.
Puisque $a < b$, alors $a - 3 < b - 3$. Mais $a - 3$ et $b - 3$ sont des nombres négatifs, donc $(a-3)^2 > (b-3)^2$, car la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

Utiliser la fonction valeur absolue

5. Réponse B :
La réponse A est fausse, car f est définie sur $\mathbb{R}$.
La réponse B est juste, car $|-5| = 5$.
La réponse C est fausse, car $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 5 \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 5$.
La réponse D est fausse, car f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$, puis croissante sur $\mathbb{R}^+$.

6. Réponses A, B et D :
La réponse A est juste, car la valeur absolue d'un réel est toujours positive.
La réponse B est juste. En effet, sur $[2\ ;\ +\infty[$: $f(x) = x - 2$ et on retrouve une fonction affine croissante.
La réponse C est fausse. Contre-exemple : $f(2) = 0$, alors que $2 + |2| = 4$.

La réponse D est juste, car, pour tout réel a : $|-a| = |a|$.

7. Réponse D :

La réponse A est fausse, car $f(3) = 3 - \sqrt{3}$, puisque $3 > \sqrt{3}$.
La réponse B est fausse, car $f(x)$ est égal à $x - 3$ seulement pour $x - 3 \geq 0$, soit $x \geq 3$.
La réponse C est fausse. Contre-exemple : $f(-1) = 4$, alors que $-(-1) - 3 = -2$.
La réponse D est juste, car pour $x \leq 3$, soit $x - 3 \leq 0$, alors $f(x) = -(x - 3) = 3 - x$.

Utiliser les propriétés concernant u + k, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$

8. Réponses A et C :

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Donc, la fonction $u : x \mapsto x^2 + 9$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.
Puisque $f = \dfrac{1}{u}$, alors f est croissante sur $]-\infty\ ;0]$ et décroissante sur $[0\ ;+\infty[$.

9. Réponses A et C :

La fonction $u : x \mapsto x - 1$ est croissante sur $]-\infty\ ;1[$ et sur $]1\ ;+\infty[$ (fonction affine).
Donc, la fonction $\dfrac{1}{u} : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est décroissante sur $]-\infty\ ;1[$ et sur $]1\ ;+\infty[$.
Ainsi, la fonction $-3 \times \dfrac{1}{u} : x \mapsto -3 \times \dfrac{1}{x-1}$ est croissante sur $]-\infty\ ;1[$ et sur $]1\ ;+\infty[$.
Puisque $f = 100 - 3 \times \dfrac{1}{u}$, f est croissante sur $]-\infty\ ;1[$ et sur $]1\ ;+\infty[$.

10. Réponses B et D :

La fonction $x \mapsto 2 + x$ est croissante sur $[-2\ ;+\infty[$ (fonction affine).
Donc, la fonction $\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{2+x}$ est croissante sur $[-2\ ;+\infty[$.
Puisque $f = -3\sqrt{u}$, f est décroissante sur $[-2\ ;+\infty[$.
Elle est donc aussi croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

11. Réponses B et D :

La fonction racine carrée est croissante sur $]0\ ;+\infty[$.
Donc, la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.
Puisque $f = u - 1$, f est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$. Elle est donc aussi décroissante sur $]1\ ;+\infty[$.