# Chapitre 5 – Les suites numériques

## Réactiver les savoirs, p. 110

## Utiliser des expressions algébriques

### *Vrai ou Faux ?*

**1. a. Faux** : $f(3) = -3^2 + 2 \times 3 + 1 = -9 + 7 = -2$.

**b. Vrai** : $f(n + 1) = -(n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 = -(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 + 1 = -n^2 - 2n - 1 + 2n + 3 = -n^2 + 2$.

**2. a. Faux** : $g(n + 1) = \frac{2}{3}(n + 1) + 4 = \frac{2}{3}n + \frac{2}{3} + 4 = \frac{2}{3}n + \frac{14}{3}$ et $g(n) + 1 = \frac{2}{3}n + 4 + 1 = \frac{2}{3}n + 5$. Par conséquent

$g(n + 1) \neq g(n) + 1$.

**b. Faux** : $\frac{2}{3}n + 4 \geq 39 \Leftrightarrow \frac{2}{3}n \geq 35 \Leftrightarrow n \geq \frac{3}{2} \times 35 \Leftrightarrow n \geq 52{,}5$. Le plus petit entier naturel $n$ tel que $g(n) \geq 39$ est donc 53.

**3.a. Faux** : $h(2) = 2\,h(1) + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$.

**b. Vrai** : $h(1) = 2\,h(0) + 3$ donc $h(1) - 3 = 2\,h(0)$ et $5 - 3 = 2\,h(0)$ puis $2 = 2\,h(0)$ soit $h(0) = 1$.

**4. a. Vrai** : le trinôme du second degré $k(x)$ a pour discriminant $\Delta = 49$ donc pour racines $\frac{3-\sqrt{49}}{2\times(-2)} = \frac{5}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{49}}{2\times(-2)} = -1$. Comme le coefficient de $x^2$ est négatif, on en déduit que $k(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1 ; \frac{5}{2}]$.

**b. Vrai** : le sommet de la parabole d'équation $y = k(x)$ a pour abscisse $\frac{-3}{2\times(-2)} = \frac{3}{4}$. Comme de plus le coefficient de $x^2$ dans $k(x)$ est négatif, $k$ est décroissante sur $[\frac{3}{4} ; +\infty[$. On en déduit que pour tout réel $x$, tel que $x \geq 24$ on a $k(x) \leq k(24)$ or $k(24) = -1\,075$ donc pour $x \geq 24$, $k(x) \leq -1\,075 < 1\,000$.

## Utiliser les exposants

### *QCM :*

**5. Réponse C :**

$3^{n+1} - 3^n = 3^n \times 3 - 3^n = 3^n\,(3-1) = 3^n \times 2 = 2 \times 3^n$.

Pour $n = 2$ on obtient $3^{n+1} - 3^n = 3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18$, $3^n = 3^2 = 9$ et $6^n = 6^2 = 36$. Les réponses A, B et D sont donc fausses.

**6. Réponses A et D :**

$5^{n+2} - 5^n = 5^n \times 5^2 - 5^n = 5^n\,(5^2 - 1) = 5^n \times 24 = 24 \times 5^n = 3 \times 2^3 \times 5^n$.

En remplaçant $n$ par 1 on vérifie que les propositions B et C sont fausses : Pour $n = 1$ on a $5^{n+2} - 5^n = 5^2 - 5 = 20$, $5^2 = 25$ et $(5^2 - 5)^n = (5^2 - 5)^1 = 20$.

**7. Réponse B :**

$f(n+1) = 3^{2(n+1)} = 3^{2n+2}$ donc $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} = \dfrac{3^{2n+2}}{3^{2n}} = 3^2 = 9$.

**8. Réponses B et C :**

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - 2\times\frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

## Utiliser les pourcentages d'évolution

### *Exercices :*

**9.** $\dfrac{240000 - 250000}{250000} = -0{,}04 = -4\ \%$. Le chiffre d'affaires de l'entreprise a diminué de 4 % entre 2013 et 2014.

**10.** $150 + 150 \times \dfrac{4}{100} = 150 + 6 = 156$. Le nouveau prix de la robe est 156 €. Le prix de la robe a été multiplié par $\dfrac{156}{150} = 1{,}04$.

**11.** Soit B le cours de l'action avant diminution et B' ce cours après diminution.
$B' = B - \dfrac{8}{100} \times B = \left(1 - \dfrac{8}{100}\right) \times B = 0{,}92 \times B$. Le cours de l'action a été multiplié par 0,92.

# Faire le point, p. 132

## Calculer les termes d'une suite

**1. Réponses B et D.**

$u_{n+1} = 5(n + 1)^2 - 1 = 5(n^2 + 2n + 1) - 1 = 5n^2 + 10n + 5 - 1 = 5n^2 + 10n + 4$.

$u_2 = 5 \times 2^2 - 1 = 5 \times 4 - 1 = 20 - 1 = 19$.

**2. Réponses A et B.**

$u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ ; $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$.

A l'aide du mode suite de la calculatrice, on obtient $u_{15} = 65\,535$.

## Calculer les termes d'une suite

**3. Réponse A**

Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$, donc

$u_{n+1} - u_n = n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1) = 2n$.

Par conséquent, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq u_n$, ce qui signifie que la suite $(u_n)$ est croissante.

**4. Réponse B**

Pour tout entier naturel $n$, $-n^2 \leq 0$ donc $-n^2 + u_n \leq u_n$, soit $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)$ est donc décroissante.

**5. Réponse B**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 6x + 15$. Elle est croissante car $f'(x) = 2x + 6$ et on a $f'(x) > 0$ pour tout $x$.

La suite $(u_n)$ définie par $u_n = n^2 + 6n + 15$ pour tout $n$ est donc croissante.

On a $u_{313} = 99\,862$ et $u_{314} = 100\,495$. $u_{313} < 10^5$ , $u_{314} > 10^5$ et $(u_n)$ est croissante, donc le plus petit entier naturel $n_0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ , $u_n \geq 10^5$, est égal à 314.

## Etudier des suites arithmétiques

**6. Réponses A et B**

Réponse A : Pour tout entier $n$, $u_{n+1} = u_n + 5$ donc $(u_n)$ est arithmétique de raison 5.

Réponse B : Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = -4(n + 1) + 1 = -4n - 3$ donc $u_{n+1} - u_n = -4n - 3 - (-4n + 1) = -4$.

La suite $(u_n)$ est donc arithmétique de raison $-4$.

Réponse C : $u_0 = -1$ ; $u_1 = 0$ ; $u_2 = 3$. $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, donc la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.

Réponse D : $u_1 = u_0 + 0 = 3$ ; $u_2 = u_1 + 1 = 4$. $u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 1$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ et la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.

**7. Réponse B**

D'après le cours, pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_0 + nr$ où $r$ est la raison de la suite arithmétique $(u_n)$. Par conséquent ; $u_n = -2 + 9n$.

**8. Réponse A**

$1 + \ldots + 100 = \frac{100\times(100+1)}{2} = \frac{100\times 101}{2} = 5\,050$.

## Etudier des suites géométriques

**9. Réponses A et B**

Réponse A : Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = (-1) \times u_n$, donc la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $-1$.

Réponse B : Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{5\times 5^n}{2\times 2^{n+1}} = \frac{5}{2} \times \frac{5^n}{2^{n+1}} = \frac{5}{2}\times u_n$. La suite $(u_n)$ est donc géométrique de raison $\frac{5}{2}$.

Réponse C : $u_0 = (0 + 1)^0 = 1$ ; $u_1 = (1 + 1)^1 = 2$ ; $u_2 = (2 + 1)^2 = 9$. Comme $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

Réponse D : $u_1 = (0 + 1)u_0 = 2$ et $u_2 = (1 + 1)\times u_1 = 2\times u_1 = 4$. Comme $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

**10. Réponse D**

D'après le cours, pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_0\times q^n$ où $q$ est la raison de la suite géométrique $(u_n)$. Par conséquent, $u_n = -2\times 7^n$.

**11. Réponse A**

$1 + 5 + \ldots + 5^8 = \frac{1-5^9}{1-5} = 488\,281$.

**12. Réponse B**

Augmenter une valeur de 2 %, c'est la multiplier par 1,02. Donc, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 1{,}02v_n$. La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison 1,02.

$1{,}02v_0 = v_1$ donc la réponse C est fausse

$v_0\times 1{,}02^n = v_n$ donc la réponse D est fausse.