Chapitre 6 - Géométrie plane

Réactiver les savoirs, p. 140

Utiliser des égalités de vecteurs

QCM :

1. Réponses A et D :

Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et on a également $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Les réponses A et D sont vraies, la réponse C est fausse.
[AC] et [BD] sont les diagonales du parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{DB}$.

2. Réponses A, B et D :

Comme $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TP}$, le quadrilatère RSPT c'est-à-dire PRST est un parallélogramme : les réponses A et B sont vraies.
En général, PRST n'est pas un parallélogramme aplati, donc P, R, S et T ne sont pas alignés : la réponse C est fausse.
Comme PRST est un parallélogramme, les droites (SR) et (TP) sont parallèles : la réponse D est vraie.

3. Réponses A et D :

$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EG}$ donc G est le milieu de [EF] : les réponses A et D sont vraies et la réponse B est fausse.
Comme G est le milieu de [EF], $\overrightarrow{GF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ donc la réponse C est fausse.

4. Réponses B, C et D :

L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ soit à $2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, donc au fait que A et B soient confondus : la réponse A est fausse.

La réponse B est vraie car il s'agit de la relation de Chasles.
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: la réponse C est vraie.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$: la réponse D est vraie.

Utiliser les coordonnées d'un lecteur

Vrai ou faux ?

5. Faux : $\overrightarrow{AB}$ (5 – (–1) ; 2 – 3) donc $\overrightarrow{AB}$ (6 ; –1).

6. Vrai : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (4 + (–2) ; 7 + 8) donc (2 ; 15)

7. Vrai : $\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{v}$ donc $\vec{t}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

8. Faux : $\overrightarrow{AM}$ (8 ; 14) donc $\begin{cases} x_M - (-1) = 8 \\ y_M - 3 = 14 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_M = 7 \\ y_M = 17 \end{cases}$.
Le point M a donc pour coordonnées (7 ; 17).

9. Vrai : $\overrightarrow{AB}$ (6 ; –1) et $\overrightarrow{AC}$ (18 ; –3) donc $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant colinéaires, les points A, B et C sont alignés.

Déterminer et utiliser une équation de droite

Exercice :

Voir manuel, page 377.

Faire le point, p. 158

Reconnaître et utiliser des égalités vectorielles

1. Réponses A et D.

Si ABCD est un rectangle alors ce quadrilatère est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: la proposition A est vraie, la réponse C est fausse.

[BD] et [AC] sont les diagonales du rectangle ABCD donc la réponse B est fausse.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$: la réponse D est vraie.

2. Réponse D.

$\overrightarrow{AB}(-4\ ;-2)$, donc $3\overrightarrow{AB}(-12\ ;-6)$; $\overrightarrow{BC}(2\ ;-10)$ donc $\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}(3\ ;-15)$. On a alors $\overrightarrow{AM}(-15\ ;9)$, donc

$\begin{cases} x_M - 3 = -15 \\ y_M - 5 = 9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_M = -12 \\ y_M = 14 \end{cases}$.

3. Réponses B et C

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas de même sens donc la proposition A est fausse.

$\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, et $\frac{DA}{AC} = 5$ donc $\overrightarrow{DA} = 5\overrightarrow{AC}$. La proposition B est vraie.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens et $\frac{AB}{BD} = \frac{3}{2}$ donc $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$. La proposition C est vraie.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas de même sens donc la proposition D est fausse.

Calculer des normes et utiliser la colinéarité de vecteurs

4. Réponses B et C

$||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2+9^2} = \sqrt{82}$; $||\vec{v}|| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$.

$\vec{u} + \vec{v}(-5\ ;12)$ donc $||\vec{u} + \vec{v}|| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$.

$\vec{u} - \vec{v}\ (3\ ;6)$ donc $||\vec{u} - \vec{v}|| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$.

5. Réponses A, B et C

$\overrightarrow{AD}\ (-6\ ;3)$ et $\overrightarrow{AB}(8\ ;-4)$ donc $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\ (-6\ ;3)$ et $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les réponses A, B et C sont vraies.

Le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{-5+10}{2}\ ;\frac{4+(-4)}{2}\right)$ soit $\left(\frac{5}{2}\ ;0\right)$. La réponse D est fausse.

6. Réponses B et D

La réponse A est fausse, puisque les points A, B et C ne sont pas alignés.

Comme $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, on a $\overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 5(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$ donc

$-2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, soit $2\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 2{,}5\overrightarrow{AC}$.

La réponse B est vraie, la proposition C est fausse.

Comme $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, on a $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{MB} - 5(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$, donc

$-2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ soit $2\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM} = -0{,}5\overrightarrow{BA} + 2{,}5\overrightarrow{BC}$. La proposition D est vraie.

7. Réponses A, C et D

La réponse A est vraie : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

La réponse B est fausse : $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{BE}$ car E est le milieu de [CD].

La réponse C est vraie : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

La réponse D est vraie : $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE} = 2\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Déterminer et utiliser les équations de droite

8. Réponses A, B et D

$-4x_A + 7y_A - 19 = -4 \times (-3) + 7 \times 1 - 19 = 12 + 7 - 19 = 0$ et

$4x_B + 7y_B - 19 = -4 \times 4 + 7 \times 5 - 19 = -16 + 35 - 19 = 0$. Les coordonnées de A et de B vérifient l'équation $-4x + 7y - 19 = 0$, donc cette équation est une équation de la droite (AB).

$-4x + 7y - 19 = 0$ équivaut à $-(-4x + 7y - 19) = 0$ donc à $4x - 7y + 19 = 0$ qui est une autre équation de la droite (AB).

$7x_B + 4y_B + 17 = 7 \times 4 + 4 \times 5 + 17 = 28 + 20 + 17 = 65 \neq 0$, donc les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation $7x + 4y + 17 = 0$, qui n'est donc pas une équation de la droite (AB).

$-4x + 7y - 19 = 0$ équivaut à $7y = 4x + 19$ soit à $y = \frac{4}{7}x + \frac{19}{7}$, qui est donc une équation de la droite (AB).

9. Réponse C

$-4x_A + 6y_A - 10 = -4 \times 7 + 6 \times 6 - 10 = -28 + 36 - 10 = -2 \neq 0$, donc la droite d'équation :

$-4x + 6y - 10 = 0$ ne passe pas par A.

Les couples $(2\ ;-3)$ et $(4\ ;-9)$ des coefficients respectifs de x et y dans les équations $2x - 3y + 5 = 0$ et $4x - 9y + 26 = 0$ne sont pas proportionnels ; donc la droite d'équation $4x - 9y + 26 = 0$ n'est pas parallèle à (d).

Les couples $(2\ ;-3)$ et $(6\ ;-9)$ sont proportionnels, donc la droite d'équation $6x - 9y + 12 = 0$ est parallèle à (d). De plus, les coordonnées de A vérifient l'équation car :

$6x_A - 9y_A + 12 = 6 \times 7 - 9 \times 6 + 12 = 42 - 54 + 12 = 0$. La parallèle à (d) passant par A a pour équation $6x - 9y + 12 = 0$.

$-2x_A + 3y_A + 4 = -2 \times 7 + 3 \times 6 + 4 = -14 + 18 + 4 = 8 \neq 0$. A n'appartient pas à la droite d'équation :

$-2x + 3y + 4 = 0$.

10. Réponses B et C

D'après le cours, le vecteur $\vec{v}(-2\ ;\ 3)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $3x + 2y + 1 = 0$. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur de coordonnées (2 ; 3) donc la réponse A est fausse.

Le vecteur $\vec{u}\ (6\ ;\ -9)$ vérifie $\vec{u} = -3\vec{v}$ donc $\vec{u}(6\ ;-9)$ est un vecteur directeur de (d). La réponse B est vraie.

Comme $\vec{v}\ (-2\ ;\ 3)$ est un vecteur directeur de (d), $\frac{3}{-2} = -1{,}5$ est le coefficient directeur de (d).