Chapitre 8 – Produit scalaire

Réactiver les savoirs, p. 192

Utiliser la trigonométrie

QCM :

1. Réponses A et D.
La réponse A est juste d'après la définition du cosinus.
La réponse B est fausse car a n'est pas forcément égal à b.
La réponse C est fausse car b n'est pas forcément égal à 1.
La réponse D est vraie car OB = 1 (cercle trigonométrique).

2. Réponses B
La réponse B est vraie d'après la définition du sinus.
La réponse A est fausse car a n'est pas forcément égal à b.
La réponse C est fausse car $\frac{a}{b}$ n'est pas forcément égal à b.
La réponse D est fausse car OB = 1.

3. Réponses B et D
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$, soit $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, d'après le chapitre précédent.
L'équation a pour solutions tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec k entier relatif.

4. Réponse D
La réponse D est vraie d'après une formule vue dans le chapitre précédent.
Pour les trois autres réponses, on peut utiliser un contre-exemple avec $\alpha = 0$ pour prouver qu'elles sont fausses.

Utiliser les coordonnées des points

Vrai ou faux ?

5. Vrai.
$\mathrm{AB}^2 = (5-4)^2 + (1-(-1))^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, donc AB = $\sqrt{5}$.

6. Faux.
$\mathrm{AC}^2 = 25$, $\mathrm{BC}^2 = 20$ et $\mathrm{AB}^2 = 5$, donc AC = 5, BC = $\sqrt{20}$ et AB = $\sqrt{5}$, donc ABC n'est pas isocèle.

7. Faux.
$20 \neq 25+5$ donc $\mathrm{BC}^2 \neq \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2$ et d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A

8. Vrai.
25=20 + 5 donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

9. Faux.
$\mathrm{AD}^2 = (4-4)^2 + (5-(-1))^2 = 36$, donc $\|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\| = \mathrm{AD} = 6$.

10. Faux.

$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ = AC = 5

$\|\overrightarrow{AB}\|$ + $\|\overrightarrow{BC}\| = AB + AC = \sqrt{5} + \sqrt{20} = 3\sqrt{5}.$ Donc : $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \neq \|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|$.

Utiliser des vecteurs

Exercices

Voir le manuel, page 378.

Faire le point, p. 210

Calculer un produit scalaire

1. **Réponse A**

La réponse A est vraie car $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$.

La réponse B est fausse car $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$

La réponse C est fausse car le triangle AIC est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore $\mathrm{AI}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$.

La réponse D est fausse car $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) = -\frac{a^2}{4}$.

2. Réponse C

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 30 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}}$

3. Réponse D

On calcule d'abord : $\overrightarrow{VW}(12\,;9)$, $\overrightarrow{UV}(3\,;-9)$ et $\overrightarrow{UW}(15\,;0)$

La réponse D est vraie car $\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW} = 3 \times 15 = 45$.

Les réponses B et C sont fausses car la réponse D est vraie.

La réponse A est fausse car $\overrightarrow{VU} \cdot \overrightarrow{VW} = -\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{VW} = -(36 - 81) = 45$.

4. Réponse C

D'après la définition du produit scalaire, $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}(\mathrm{IK}^2 - \mathrm{IJ}^2 - \mathrm{IC}^2) = \frac{1}{2}(14^2 - 8^2 - 10^2) = 16$.

Utiliser les propriétés du produit scalaire

5. Réponse A

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$, c'est à dire à $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE}) = 0$,

puis à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$.

C'est-à-dire que (AB) et (ED) sont perpendiculaires.

De plus, les réponses B, C et D ne sont pas équivalentes à la réponse A.

6. Réponses B, C et D

La réponse A est fausse et a réponse B est vraie car $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

La réponse C est vraie car $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

De même, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, donc la réponse D est vraie.

7. Réponse C

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \mathrm{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$

Démontrer à l'aide du produit scalaire

8. Réponses B et D

$\overrightarrow{IJ}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{KL}(3\,;-3)$ donc $\overrightarrow{IJ}\cdot\ \overrightarrow{KL}=0$. Ainsi, les droites (IJ) et (KL) sont perpendiculaires, et donc sécantes.

9. Réponses A et C

D'après le théorème de la médiane, $12^2+16^2=2\ \mathrm{CI}^2+\frac{8^2}{2}$, d'où CI = $\sqrt{184}=\sqrt{4\times 46}=2\sqrt{46}$.

10. Réponses C et D

On calcule d'abord : $\overrightarrow{VU}$(-3 ; 9) et $\overrightarrow{VW}(12\,;9)$, d'où $\overrightarrow{VU}\cdot\overrightarrow{VW}=45$.

$\mathrm{VU}=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ et $\mathrm{WV}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}=15$.

De l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{VU}\cdot\overrightarrow{VW}$ = VU× VW× $\cos(\widehat{UVW})$, on déduit :

$\cos(\widehat{UVW})=\frac{45}{15\times3\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\widehat{UVW}\ \approx 1{,}24$ rad.

11. Réponses A, B et C

La réponse A est vraie car un parallélogramme ABCD est un rectangle si, et seulement si, les côtés consécutifs [AB] et [AD] sont perpendiculaires ce qui équivaut à $\overrightarrow{AB}\cdot\ \overrightarrow{AD}=0$.

La réponse B est vraie car un parallélogramme ABCD est un rectangle si et seulement si ses diagonales (AC) et (BD) ont la même longueur.

Ce qui équivaut à AC = BD, soit $\mathrm{AC}^2=\mathrm{BD}^2$, soit encore $\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BD}^2$.

La réponse C est vraie car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, c'est-à-dire à :

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$, puis à $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

La réponse D est fausse car le fait d'avoir des diagonales perpendiculaires caractérise le losange parmi les parallélogrammes et non le rectangle.