Chapitre 9 - Applications du produit scalaire

Réactiver les savoirs, p. 218

Utiliser la trigonométrie

QCM

1. Réponse C

Le point A est le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$ donc, par définition du cosinus et du sinus, le point A a pour coordonnées $(\cos(\frac{\pi}{3})\ ;\ \sin(\frac{\pi}{3}))$, c'est à dire $(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. Réponses A et D

La réponse A est vraie car d'après la relation de Chasles :
$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + 2k\pi = -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, avec k entier.

La réponse D est vraie car $\frac{\pi}{12} - (-\frac{23\pi}{12}) = 0 + 2k\pi$.

Les réponses B et C sont fausses car $\frac{\pi}{12} - (\frac{7\pi}{12}) = \frac{-6\pi}{12} \neq 2k\pi$ et $\frac{\pi}{12} - (-\frac{7\pi}{12}) = \frac{8\pi}{12} \neq 2k\pi$

3. Réponse B

Les réponses A, C et D sont fausses. On peut utiliser un contre-exemple avec $t = \frac{\pi}{2}$.
La réponse B est vraie en utilisant la symétrie d'axe la première bissectrice, d'équation $y = x$, ou en utilisant directement une connaissance du chapitre 7 (p. 174).

4. Réponse B

La réponse B est vraie car le triangle est rectangle en D donc, d'après le théorème de Pythagore,
$\text{FE} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ et $\cos(\hat{E}) = \frac{\text{DE}}{\text{FE}} = \frac{6}{10}$.
Les réponses A, C et D sont fausses car aucun des nombres $\frac{8}{6}$, $\frac{8}{10}$ et $\frac{6}{8}$ n'est égal à $\frac{6}{10}$.

5. Réponses A et D

La réponse A est vraie et la réponse B est fausse car :
MNP est un triangle rectangle en M donc l'angle $\widehat{N}$ est aigu et $\sin(\widehat{N})$ est positif. De plus :
$\sin(\widehat{N})^2 = 1 - \cos(\widehat{N})^2 = 1 - (\frac{12}{13})^2 = \frac{25}{169}$ d'où $\sin(\widehat{N}) = \frac{5}{13}$.
La réponse D est vraie et la réponse C est fausse car : MNP est un triangle rectangle en M, donc l'angle $\widehat{P} = \frac{\pi}{2} - \widehat{N}$ et $\sin(\widehat{P}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \widehat{N}) = \cos(\widehat{N}) = \frac{12}{13}$.

Calculer avec des vecteurs

Vrai ou faux ?

6. Vrai

ABCDEF est un hexagone régulier donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$ et, d'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DB}$.

7. Faux

$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$=$-$ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}$= $-OA^2$ = -9. Or 2OA= 6.

8. Vrai

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{EC}$, donc $\overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$, car OCDE est un losange et donc ses diagonales (CE) et (OA) sont perpendiculaires.

9. Faux

$OA^2 = OB^2 = 9$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3 \times 3 \times \cos(60°) = \frac{9}{2}$.

$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 =$ $OA^2 + OB^2 + 2\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ =18 + 9 = 27.

Utiliser des coordonnées

Exercices

Voir manuel page 379.

Faire le point, p. 234

Déterminer des équations de droites et de cercles

1. Réponses B et D

La réponse D est vraie car une équation de la droite passant par le point A (2 ; 5) et de vecteur normal $\vec{n}(1 ; 3)$ est de la forme $x + 3y + c = 0$, avec c l'unique nombre réel tel que $2 + 3 \times 5 + c = 0$, c'est-à-dire $c = -17$.
La réponse B est vraie car l'équation $2x + 6y - 34 = 0$ est équivalente à l'équation $x + 3y - 17=0$ (division par 2 membre à membre).
La réponse A est fausse car $2 + 3 \times 5 + 17 \neq 0$ et donc le point A n'appartient pas à cette droite.
La réponse C est fausse car $2 \times 2 + 5 \times 5 - 7 \neq 0$ et donc le point A n'appartient pas à cette droite.

2. Réponse B

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (3 ; 2).
La réponse B est vraie car une droite perpendiculaire à (AB) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et est donc de la forme $3x + 2y + c = 0$. En outre, la droite passe par O (0 ; 0) d'où $c = 0$.
La réponse A est fausse car le point O (0 ; 0) n'appartient pas à cette droite.
La réponse C est fausse car le point O (0 ; 0) n'appartient pas à cette droite.
Laréponde D est fausse car la droite $2x + 3y = 0$ a pour vecteur normal (2 ; 3) et ce vecteur n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 2).

3. Réponses B et D

Les réponses B et D sont vraies car le cercle de centre A (4 ; 0) et de rayon 3 a pour équation :
$(x-4)^2 + (y-0)^2 = 3^2$, c'est à dire $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 9 = 0$, et après réduction :
$x^2 - 8x + y^2 + 7 = 0$.
La réponse A est fausse car, pour M de coordonnées (x ; y), $(x-4)^2 + y^2 = 0$ équivaut à $\mathrm{AM}^2 = 0$, c'est-à-dire M =A, ce qui ne correspond pas à un cercle de rayon 3.
La réponse C est fausse car l'équation $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$ équivaut à $(x-(-4))^2 + y^2 = 9$ qui est un cercle de centre (-4 ; 0) et non le point A.

4. Réponse A et D

L'équation $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 7 = 0$ équivaut à $(x-5)^2 + (y-(-2))^2 = 22$, c'est à dire $(x-5)^2 + (y-(-2))^2 = \sqrt{22}^2$ qui est de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, avec $a = 5$, $b = -2$ et $R = \sqrt{22}$, d'où le centre (5 ; -2) et le rayon $\sqrt{22}$.

5. Réponse B

Soit M un point de coordonnées (x ; y), alors $\overrightarrow{MA}\,(1-x ; 2-y)$ et $\overrightarrow{MB}\,(-3-x ; 4-y)$.
M appartient au cercle de diamètre [AB] équivaut à $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, c'est-à-dire à $(1-x)(-3-x)+(2-y)(4-y)= 0$, ce qui donne après développement et réduction :
$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$.
Ainsi la réponse B est vraie.
La réponse A est fausse car en remplaçant (x ; y) par les coordonnées de A, (1 ; 2), dans l'expression $x^2 + 2x + y^2 - 6y$, on n'obtient pas 5 et donc A, qui est un point du cercle, n'appartient pas à cet ensemble.
La réponse C est fausse car en remplaçant (x ; y) par les coordonnées de B, (-3 ; 4), dans l'expression $(x-1)(x+3) + (2-y)(y-4)$, on n'obtient pas 0 et donc B, qui est un point du cercle, n'appartient pas à cet ensemble.

La réponse D est fausse car l'équation $(x-1)(y-4) - (y-2)(x+3) = 0$ équivaut à $2x + 4y - 10 = 0$ qui est l'équation d'une droite.

Utiliser les relations métriques dans un triangle

6. Réponses C et D

La réponse D est vraie et la réponse A est fausse car, en utilisant le théorème d'Al-Kashi, on obtient $8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(\widehat{A})$, c'est à dire $\cos(\widehat{A}) = -\frac{12}{48} = -\frac{1}{4}$.

La réponse C est vraie car $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 104{,}5\,°$.

La réponse B est fausse car, en utilisant le théorème d'Al-Kashi, on obtient $6^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \times 4 \times 8 \times \cos(\widehat{B})$, c'est à dire $\cos(\widehat{B}) = \frac{11}{8}$.

7. Réponse A

La réponse A est vraie car, en utilisant le théorème d'Al-Kashi, on obtient :

$BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(60°) = 13$, d'où $BC = \sqrt{13}$.

La réponse C est fausse car 3,6 est une valeur approchée de $\sqrt{13}$ mais ne lui est pas égal.

La réponse D est fausse car $\sqrt{13}^2 = 13 \neq 5{,}8^2$.

La réponse B est fausse car $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}^2 = 25 - 12\sqrt{3} \neq 13$.

8. Réponse D

La réponse D est vraie car, d'après la loi des sinus,

$\frac{BC}{\sin(45°)} = \frac{5}{\sin(60°)}$, c'est-à-dire $\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $BC = 5\,\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Les trois autres réponses sont fausses car aucun des nombres $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$ et $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$ n'est égal à $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Utiliser les formules d'addition et de duplication

9. Réponse C

La réponse C est vraie car $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$.

Les trois autres réponses sont fausses. On peut utiliser un contre-exemple en choisissant $x = \frac{\pi}{4}$.

10. Réponse B

La réponse B est vraie car $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$.

La réponse A est fausse, on peut choisir $x = 0$.

Les réponses C et D sont fausses, on peut choisir $x = \frac{\pi}{3}$.