Chapitre 11 – Probabilités : variables aléatoires

Réactiver les savoirs, p. 268

Dénombrer

QCM :

1. **Réponse D**
   Quand on tire deux boules successivement dans un sac contenant 5 boules en remettant la première boule tirée dans le sac, on a 5 choix possibles pour le premier tirage, et pour chacun de ces 5 choix, on a encore 5 choix possibles pour le tirage de la seconde boule.
   $5 \times 5 = 25$. Il y a donc **25 tirages** distincts possibles.
   On peut construire un arbre de choix.
2. **Réponse C.**
   Dans cet exercice, on ne remet pas la seconde boule tirée dans le sac. Il y a toujours 5 choix possibles pour le tirage de la première boule, mais pour chacun de ces cinq choix, il n'y a plus que 4 choix possibles pour le tirage de la seconde boule (les 5 boules du sac moins la boule déjà tirée).
   $5 \times 4 = 20$. Il y a donc dans ce cas **20 tirages** distincts possibles.

Calculer une probabilité

Vrai ou faux :

3. **Faux**. Puisqu'on choisit au hasard un élève de la classe, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.
   Il y a 12 garçons et 29 élèves au total. Donc la probabilité de choisir un garçon est $\frac{12}{29}$, qui est différent de $\frac{1}{12}$. .

4. **Vrai.** Notons p la probabilité de sortie de la face numérotée « 4 ». La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1, donc : $0,5 + 0,1 + 0,2 + p = 1$. D'où : $p = 1 - 0,8 = 0,2$.

5. **Faux**. Lorsque l'on tape un code au hasard, on a dix possibilités pour le premier chiffre. Pour chacune de ces possibilités, on a encore dix choix pour le second chiffre etc. Au total, on a donc 10 000 codes possibles. Le code étant tapé au hasard, la probabilité d'avoir le bon est donc $\frac{1}{10\,000}$.

6. **Faux**. On a au total quatre issues possibles : PP, PF, FP, FF, en notant P pour « pile » et F pour « face ». La pièce étant bien équilibrée, la probabilité d'obtenir deux côtés « pile » est donc $\frac{1}{4}$.

Utiliser les propriétés des probabilités

Exercices :

7. $P(\overline{\text{A}}) = 1 - P(\text{A}) = 0{,}75.$

$P(\text{A}\cup\text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$ donc $P(A\cup B) = \frac{23}{60}$.

8. **a**. Il y a 10^4 codes possibles, dont 9^4 codes avec tous les numéros faux. La probabilité d'avoir faux à tous les numéros est donc égale à $\frac{9^4}{10^4}$, soit 0,6561. Avoir au moins un bon numéro est l'événement contraire, donc de probabilité 1- 0,6561, soit 0,3439.

b. L'événement contraire est « avoir le bon code », de probabilité $\frac{1}{10^4}$ = 0,0001.

La probabilité demandée est donc égale à 1 - 0,0001=0,9999.

9. Il y a 4 rois et 13 trèfles, dont le roi de trèfle. Il y a ainsi 16 cartes qui sont soit du trèfle, soit un roi. La probabilité demandée est donc $\frac{16}{52}$, soit $\frac{4}{13}$.

Faire le point, p. 286

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire

1. Réponse B.
Si on tire deux boules jaunes, on perd 2 € ; si on tire une boule jaune et une boule rouge, on gagne 1 € ; si on tire deux boules rouges, on gagne 4 €.
L'ensemble des valeurs prises par X est {-2 ; 1 ; 4}.
2. Réponse A.
L'événement « $X = 4$ » est réalisé lorsqu'on tire deux boules rouges.
Puisqu'il y a 5 boules dans le sac, il y a 25 tirages distincts possibles (5×5). Pour obtenir deux boules rouges, on a trois choix possibles au premier tirage et encore trois choix au second tirage, ce qui fait 9 choix possibles.
Les tirages ayant lieu au hasard, on fait l'hypothèse d'équiprobabilité des 25 issues, d'où :
$P(X = 4) = \dfrac{9}{25} = 0{,}36$
3. Réponse C. La somme des probabilités $P(N = n_i)$ est égale à 1, soit :
$0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}09 + 0{,}13 + 0{,}20 + a + 0{,}16 + 0{,}08 + 0{,}04 = 1$
On en déduit : $a + 0{,}81 = 1$, donc $a = 0{,}19$.

Utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire

4. Réponse C.
$$\begin{aligned} P(N \leq 4) &= P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4) \\ &= 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}09 \\ &= 0{,}20 \end{aligned}$$

5. Réponses A et D.

La probabilité que Léa ait reçu plus de huit SMS en un jour est :
$P(N > 8) = P(N = 9) + P(N = 10) = 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}12$

Déterminer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire

6. Réponse B.
On suppose l'équiprobabilité des 500 issues possibles au tirage.
Ainsi : $P(X = 1000) = \dfrac{1}{500} = 0{,}002$.

Il y a 50 billets se terminant par 0 (500/10 = 50), donc $P(X = 10) = \dfrac{50}{500} = 0{,}1$.

$P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 1000) = 1$, d'où : $P(X = 0) = 1 – 0{,}002 – 0{,}1 = 0{,}898$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

$\boldsymbol{x_i}$	0	10	1000
P ($\boldsymbol{X = x_i}$)	0,898	0,1	0,002

On en déduit : $E(X) = 0 \times 0{,}898 + 10 \times 0{,}1 + 1000 \times 0{,}002 = 3$

7. Réponse B. $V(X) = 0^2 \times 0{,}898 + 10^2 \times 0{,}1 + 1000^2 \times 0{,}002 - 3^2 = 2010 - 9 = 2001$
On peut aussi utiliser le module STAT de la calculatrice pour calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Utiliser des arbres pondérés pour des épreuves répétées

8. **Réponse B.**
On répète 4 fois de façon indépendante une même expérience. Notons S l'issue « obtenir la face numérotée 6 ».
La probabilité d'obtenir 4 fois le 6 est : P (SSSS) = $0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}2^4 = 0{,}0016$

9. Réponse C. Notons S' l'évènement « obtenir une autre face que celle numérotée 6 ». La probabilité de n'obtenir aucune fois le six est celle de la liste S'S'S'S', soit $0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}8^4$.
L'événement « obtenir au moins une fois le six » est l'évènement contraire de l'évènement précédent : il a donc pour probabilité $1 - 0{,}8^4 = 0{,}5904 \approx 0{,}59$, à 0,01 près**.**