Chapitre 13 – Echantillonnage

Réactiver les savoirs, p. 322

Déterminer un intervalle de fluctuation

Exercice :
Voir manuel, p. 381

Reconnaître la loi binomiale

Vrai ou faux ?

5. a. Faux.
En effet, les tirages se déroulent sans remise, il n'y a donc pas indépendance des tirages.

b. Vrai.
La raison en est la même que pour la question précédente

6. a. Faux.
X suit bien une loi binomiale, car l'expérience qui consiste à tirer un sachet de thé et à examiner si c'est un sachet de thé vert se répète 5 fois de façon identique et indépendante (car les tirages se déroulent avec remise).

b. Faux.
X suit une loi binomiale, mais ses paramètres sont $n = 5$ (car il y a 5 tirages) et $p = 0{,}45$ (car la probabilité de tirer un sachet de thé vert est $\frac{18}{40} = 0{,}45$).

c. Vrai.
Y suit une loi binomiale, car l'expérience qui consiste à tirer un sachet de thé et à examiner si c'est un sachet de thé blanc se répète 5 fois de façon identique et indépendante (car les tirages se déroulent avec remise) : ses paramètres sont $n = 5$ (car il y a 5 tirages) et $p = 0{,}15$ (car la probabilité de tirer un mouchoir jaune est $\frac{6}{40} = 0{,}15$).

Calculer avec la loi binomiale

QCM :

7. Réponse A.
La calculatrice permet d'obtenir : $P(X = 20) \approx 0{,}115$.

8. Réponse C.
La calculatrice permet d'obtenir : $P(X \leq 15) \approx 0{,}096$.

9. Réponse D
$P(16 \leq X \leq 22) = P(X \leq 22) - P(X \leq 15) \approx 0{,}671$, en utilisant la calculatrice.

10. Réponses C et D
À l'aide de la calculatrice, on forme le tableau des valeurs $P(X \leq k)$.
On obtient : $P(X \leq 12) \approx 0{,}013$ et $P(X \leq 13) \approx 0{,}028$.
La plus petite valeur de k telle que $P(X \leq k) \geq 0{,}025$ est donc 13.
La valeur 18 convient aussi, car les valeurs $P(X \leq k)$ sont croissantes avec les valeurs de k.

11. Réponses B et D
L'événement « $X \geq b$ » a pour événement contraire « $X < b$ ».
Ainsi, $P(X \geq b) \geq 0{,}025$ équivaut à $1 - P(X < b) \geq 0{,}025$, soit $P(X < b) \leq 0{,}975$: cel aprouve que la réponse D est vraie, et aussi que l'affirmation A est fausse.
Puisque X ne prend que des valeurs entières, on a : $P(X < b) = P(X \leq b - 1)$.
Ainsi, $P(X \geq b) \geq 0{,}025$ équivaut à $P(X \leq b - 1) \leq 0{,}975$: l'affirmation B est vraie.
Enfin, $P(X \leq b) = P(X < b) + P(X = b)$
$P(X < b) \leq 0{,}975$ équivaut à $P(X \leq b) \leq 0{,}975 - P(X = b)$, et l'équivalence avec $P(X \leq b) < 0{,}975$ n'est pas réalisée.

Réactiver les savoirs, p. 336

Calculer avec la loi binomiale

1. Réponse D
À l'aide de la calculatrice, on forme le tableau des valeurs $P(X \leq k)$.
On obtient : $P(X \leq 26) \approx 0{,}0155$ et $P(X \leq 27) \approx 0{,}02705$.
La plus petite valeur de k telle que $P(X \leq k)$ dépasse 0,025 est donc 27.

2. Réponse B
On utilise encore le tableau des valeurs $P(X \leq k)$.
On obtient : $P(X \leq 44) \approx 0{,}97165$ et $P(X \leq 45) \approx 0{,}9834$.
La plus petite valeur de k telle que $P(X \leq k)$ dépasse 0,075 est donc 45.

3. Réponse C
On utilise toujours le tableau des valeurs $P(X \leq k)$.
On obtient : $P(X \leq 24) \approx 0{,}00436$ et $P(X \leq 25) \approx 0{,}00844$.
La plus petite valeur de k telle que $P(X \leq k)$ dépasse 0,005 est donc 25.

Déterminer un intervalle de fluctuation

4. Réponse B
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 voyageurs du paquebot, associe le nombre de femmes : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1650}{3000} = 0{,}55$.
Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est : $a = 21$.
Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}025$ est : $b = 34$.
Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des femmes dans les échantillons de taille 50 du paquebot est : $\left[\frac{21}{50}, \frac{34}{50}\right]$, soit [0,42 ; 0,68].

5. Réponse C
Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 voyageurs du paquebot, associe le nombre d'hommes : Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{1350}{3000} = 0{,}45$.
Le plus petit entier a tel que $P(Y \leq a) > 0{,}025$ est : $a = 35$.
Le plus petit entier b tel que $P(Y \leq b) \geq 0{,}975$ est : $b = 55$.
Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des hommes dans les échantillons de taille 100 du paquebot est : $\left[\frac{35}{100}, \frac{55}{100}\right]$, soit [0,35 ; 0,55].

6. Réponse D
Soit Z la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 voyageurs du paquebot, associe le nombre d'hommes : Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = \frac{1350}{3000} = 0{,}45$.
Le plus petit entier a tel que $P(Z \leq a) > 0{,}005$ est : $a = 72$.
Le plus petit entier b tel que $P(Z \leq b) \geq 0{,}995$ est : $b = 108$.

Un intervalle de fluctuation au seuil de 99 % de la fréquence des hommes dans les échantillons de taille 200 du paquebot est : $\left[\frac{72}{200}, \frac{108}{200}\right]$, soit [0,36 ; 0,54].

Prendre une décision à partir d'un échantillon

7. Réponse D

La fréquence des Français qui possèdent un compte Facebook dans l'échantillon est : $f = \frac{129}{200} = 0{,}645$.

Puisque f n'appartient pas à l'intervalle [0,655 ; 0,780], on rejette l'hypothèse (H) au seuil de 95 %.

La fréquence des français qui possèdent un compte Twitter dans l'échantillon est : $f' = \frac{46}{200} = 0{,}23$.

Puisque f' appartient à l'intervalle [0,130 ; 0,235], on accepte l'hypothèse (H') au seuil de 95 %.
Ainsi, on rejette (H) et on accepte (H').

8. Réponse A

La fréquence des Français qui possèdent un compte Facebook dans l'échantillon est : $f = \frac{129}{200} = 0{,}645$.

Puisque f appartient à l'intervalle [0,635 ; 0,800], on accepte l'hypothèse (H) au seuil de 99 %.

La fréquence des Français qui possèdent un compte Twitter dans l'échantillon est : $f' = \frac{46}{200} = 0{,}23$.

Puisque f' appartient à l'intervalle [0,130 ; 0,235], on accepte l'hypothèse (H') au seuil de 99 %.
Ainsi, on accepte les hypothèses (H) et (H').