Chapitre 4 – Applications de la dérivation

Réactiver les savoirs, p. 86

Déterminer le signe d'une expression

QCM :

1. Réponses C et D :

$-5x - 10 = 5(-x - 2)$ et 5 étant positif le signe de $-5x - 10$ est le même que celui de $-x - 2$.
D'autre part $-x - 2 \geq 0$ équivaut à $-2 > x$ soit $x \in]-\infty ; -2]$.

2. Réponses B et C :

Le trinôme du second degré $x^2 + 5x + 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 4 \times 1 \times 6 = 1$ donc ce trinôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$. Comme le coefficient de x^2 est positif, on déduit le tableau de signes de $x^2 + 5x + 6$:

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$x^2 + 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Réponses B et C :

$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$ or pour $x \geq 0$, on a $2 + x > 0$ donc sur $[0 ; +\infty[$, $4 - x^2$ est du même signe que $2 - x$.

$4 - x^2$ est un trinôme du second degré ayant -2 et 2 pour racines, et -1 comme coefficient de x^2, on déduit donc le tableau de signes de ce trinôme.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. Réponses A et D :

Pour tout réel x, $(2x - 6)^2 \geq 0$ donc pour tout réel x différent de 3, $\dfrac{7-x}{(2x-6)^2}$ a le même signe que $7 - x$.

D'autre part $7 - x \leq 0$ équivaut à $7 \leq x$ soit $x \in [7 ; +\infty[$.

Utiliser la représentation graphique d'une fonction

Vrai ou Faux ?

5. **Vrai** : la partie de la courbe de f correspondant à cet intervalle « monte ».

6. **Vrai** : $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente T_1 et celui-ci est positif.

7. Vrai : $f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente T_3 et cette droite passe par les points

A (4 ; 1,5) et B (6 ; 0) donc $f'(4) = \dfrac{0-1{,}5}{6-4} = \dfrac{-1{,}5}{2} = -0{,}75$.

8. Faux : $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_2, donc $f'(1) = 0$.

9. Faux : le maximum de f est $f(1) = 3$.

10. Vrai : parmi les points de la courbe ayant une abscisse comprise dans l'intervalle [4 ; 9], celui qui a l'ordonnée la plus petite est le point C (7;0) donc le minimum de f sur [4 ; 9] est 0.

11. Faux : sur l'intervalle [1 ; 7], la courbe de f est située au-dessus de l'axe des abscisses donc

$f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1 ; 7]$.

Calculer une dérivée

Exercices :

Voir manuel, page 376.

Faire le point, p. 102

Passer du sens de variation d'une fonction au signe de la dérivée

1. Réponses A et B.

Sur l'intervalle $[-1\ ;0]$, f est décroissante donc $f'(x)$ est négatif. La réponse A est vraie.

Sur l'intervalle $[3\ ;4]$, f est croissante donc $f'(x)$ est positif. La réponse B est vraie.

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Cette tangente n'est pas parallèle à l'axe des abscisses donc $f'(1) \neq 0$. La réponse C est fausse.

Comme sur l'intervalle $[3\ ;4]$, $f'(x)$ est positif, la réponse D est fausse.

2. Réponse B.

À partir de la courbe représentative de f, on dresse la tableau de variations de f, puis on déduit le signe de $f'(x)$ en utilisant la propriété du cours reliant signe de la dérivée d'une fonction et sens de variation de cette fonction

x	-2		-1		3		4
f	2	↗	4	↘	-3	↗	-2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Etudier les variations et les extremums d'une fonction

3. Réponse D

Pour tout réel x, $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$. On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Les réponses A, B et C sont donc fausses et la réponse D est vraie.

4. Réponses A, B et D

Pour tout réel x, $g'(x) = -4x^3+12x^2 = 4x^2(-x+3)$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$4x^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Les réponses A, B et D sont vraies.

La réponse C est fausse.

5. Réponses C et D

Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;+\infty[$, $h'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{x^2-25}{x^2} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{x^2}$.

On en déduit le tableau suivant :

x	0		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Les réponses A et B sont fausses. Les réponses C et D sont vraies

6. Réponses B et D

Pour tout réel x de l'intervalle $[5\ ;10]$, $i(x) = \dfrac{5\times(x-4)-(5x+2)\times 1}{(x-4)^2} = \dfrac{5x-20-5x-2}{(x-4)^2} = \dfrac{-22}{(x-4)^2}$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[5\ ;10]$, $i(x)<0$ donc i est décroissante.

Les réponses A et C sont fausses.

Les réponses B et D sont vraies.

Obtenir des inégalités

7. Réponses A et D

On construit le tableau de variation de la fonction f à l'aide du tableau de signes de $f'(x)$.

x	-2		-1		0		$+3$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	$\nearrow$	$-13{,}5$	$\searrow$	-14	$\nearrow$	$26{,}5$

Le maximum de f sur $[-2\,;0]$ est $-13{,}5$ donc $f(x)$ est négatif sur cet intervalle. La réponse A est donc vraie et la réponse B est fausse.

$0 \in [-1\ ;\ 2]$ et $f(0) = -14 < -13{,}5$ donc la proposition C est fausse.

Sur l'intervalle $[-1\ ;0]$, $-14 \leq f(x) \leq -13{,}5$ et sur l'intervalle $[0\ ;3]$, $-14 \leq f(x) \leq 26{,}5$ donc sur l'intervalle $[-1\ ;3]$ on a $-14 \leq f(x) \leq 26{,}5$.

8. Réponses A, B et D

$f(2) = 0$ donc d'après le tableau de variation de f on déduit que $f(x) \leq 0$ pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;2]$ c'est-à-dire $x^3 + 1{,}5x^2 - 14 \leq 0$ sur $[-2\ ;2]$. La réponse A est vraie

$x^3 + 1{,}5x^2 - 14 \leq 0$ équivaut à $2(x^3 + 1{,}5x^2 - 14) \leq 0$ soit à $2x^3 + 3x^2 - 28 \leq 0$. la réponse B est vraie.

$2 \in [-2\ ;2]$ et $f(2) = 0$ donc la réponse C est fausse.

Sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$, $f(x) \geq 0$ donc $x^3 + 1{,}5x^2 - 14 \geq 0$ soit $x^3 + 1{,}5x^2 \geq 14$. La réponse D est vraie.