Chapitre 12 Échantillonnage et estimation

Réactiver les savoirs, p. 366

Utiliser la loi binomiale

QCM

1. **Réponse C.**
L'épreuve consistant à tirer un jeton dans un sac et à examiner sa couleur se répète 10 fois de façon identique et indépendante (car le tirage a lieu avec remise), donc la variable aléatoire comptant le nombre de jetons rouges tirés suit une loi binomiale.
Son paramètre n est égal à 10, car il y a n répétitions, et son paramètre p est la probabilité de tirer un jeton rouge sur un tirage, soit $\frac{6}{10} = 0{,}6$.

2. **Réponse D.**
On a : $P(15 \leq X \leq 22) = P(X \leq 22) - P(X \leq 14) \approx 0{,}658$.

3. **Réponse C.**
Avec la calculatrice, on obtient : $P(X \leq 8) \approx 0{,}018$ et $P(X \leq 9) \approx 0{,}040$, donc $a = 9$.

Utiliser la loi normale

Vrai ou faux ?

4. **Faux.**
$P(-a \leq X \leq a) = 2\,\phi(a) - 1$, où $\phi(x) = P(X \leq x)$.
D'où $P(-a \leq X \leq a) = 0{,}80 \Leftrightarrow 2\,\phi(a) - 1 = 0{,}8 \Leftrightarrow \phi(a) = 0{,}9$.
Avec la calculatrice, on obtient : $a \approx 1{,}28$.

5. **Vrai.**
Cette probabilité remarquable a été vue en cours (chapitre 11, page 344).

6. **Vrai.**
$E(X_n) = 0{,}1n$ et $V(X_n) = 0{,}1 \times 0{,}9n = 0{,}09n$, donc $\sigma(X_n) = 0{,}3\sqrt{n}$.
On applique alors le théorème de Moivre-Laplace (chapitre 11, page 340) à la variable X_n, et alors $\lim_{n\to\infty} a_n = P(-1{,}96 \leq Y \leq 1{,}96)$, où Y suit la loi normale centrée réduite.
D'après le résultat du cours de la page 342, $P(-1{,}96 \leq Y \leq 1{,}96)$ est égal à 0,95 à 0,01 près.

Connaître des intervalles de fluctuation d'une fréquence

Exercices

7. 1. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % d'une fréquence a été donné en Seconde sous la forme : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Ici, $p = 0{,}2$ et $n = 100$, d'où l'intervalle : $[0{,}2 - 0{,}1\ ;\ 0{,}2 + 0{,}1] = [0{,}1\ ;\ 0{,}3]$.
2. a. L'épreuve consistant à prélever une perle dans la boîte se répète 100 fois de façon identique et

indépendante, et la probabilité de succès est 0,2. Donc X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,2.
b. La calculatrice donne : $P(X \leq 11) \approx 0{,}013$ et $P(X \leq 12) \approx 0{,}025$ donc $a = 12$.
De même, $P(X \leq 27) \approx 0{,}966$ et $P(X \leq 28) \approx 0{,}980$ donc $b = 28$.
c. D'après la méthode vue en Première, on peut dire qu'un autre intervalle de fluctuation de la fréquence des perles jaunes au seuil de 95 % est donc $\left[\frac{12}{100} ; \frac{28}{100}\right] = [0{,}12 ; 0{,}28]$.
3. La probabilité que la fréquence de perles jaunes dans un échantillon de taille 100 issu de la boîte soit comprise entre 0,12 et 0,28 est d'au moins 0,95.
Le second intervalle trouvé est plus précis que le premier.

Faire le point, p. 382

Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique

1. Réponses C et D.

On a : $p = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$ donc $np = 0{,}96n$ et $n(1 - p) = 0{,}04n$.
On doit avoir $n \geq 30$ et $0{,}96n \geq 5$ et $0{,}04n \geq 5$, soit $n \geq 30$ et $n \geq 6$ et $n \geq 125$.
Les conditions de validité sont vérifiées pour n supérieur ou égal à 125.

2. Réponse B.

Les conditions de validité sont vérifiées, car $n \geq 30$, et $np = 192$, soit $np \geq 5$ et $n(1 - p) = 8$, soit $n(1 - p) \geq 5$.
Ici, $n = 200$ et $p = 0{,}96$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est [0,932 ; 0,988], en arrondissant les bornes à 0,001 près, soit [0,93 ; 0,99] en arrondissant à 0,01 près.

3. Réponse C.

Les conditions de validité sont vérifiées, car $n \geq 30$, $np = 20$, soit $np \geq 5$ et et $n(1 - p) = 480$, soit $n(1 - p) \geq 5$.
Ici, $n = 500$ et $p = 0{,}04$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est [0,022 ; 0,058], en arrondissant les bornes à 0,001 près, soit [0,02 ; 0,06] en arrondissant à 0,01 près.

4. Réponse A.

Les conditions de validité sont vérifiées, car $n \geq 30$, $np = 12$, soit $np \geq 5$ et $n(1 - p) = 288$, soit $n(1 - p) \geq 5$.
Ici, $n = 300$ et $p = 0{,}04$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % est [0,010 ; 0,070], en arrondissant les bornes à 0,001 près, soit [0,01 ; 0,07] en arrondissant à 0,01 près.

Prendre une décision à partir d'un échantillon

5. Réponse C.

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des cadres ayant un Smartphone au seuil de 95 % est I = [0,870 ; 0,930], en arrondissant les bornes à 0,001 près.
Puisque la fréquence observée dans l'échantillon est $\frac{346}{400} = 0{,}865$, on rejette (H) puisque cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle I.
L'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des cadres ayant une tablette tactile au seuil de 95 % est J = [0,274 ; 0,366], en arrondissant les bornes à 0,001 près.
Puisque la fréquence observée dans l'échantillon est $\frac{140}{400} = 0{,}35$, on accepte (H') puisque cette fréquence appartient à l'intervalle J.

6. Réponse A.

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des cadres ayant un Smartphone au seuil de 99 % est I'= [0,861 ; 0,939], en arrondissant les bornes à 0,001 près.
Puisque la fréquence observée dans l'échantillon est 0,865, on accepte (H) puisque cette fréquence appartient à l'intervalle I'.
L'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des cadres ayant une tablette tactile au seuil de 99 % est J' = [0,259 ; 0,381], en arrondissant les bornes à 0,001 près.
Puisque la fréquence observée dans l'échantillon est 0,35, on accepte (H') puisque cette fréquence appartient à l'intervalle J'.

Estimer par intervalle une proportion

7. Réponse B.

On a ici : $n = 1\,000$ et $f = 0{,}55$.

Les conditions de validité sont vérifiées, car $n \geq 30$, $nf = 550$, soit $nf \geq 5$ et $n(1 - f) = 450$, soit $n(1 - f) \geq 5$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % est [0,51 ; 0,59] en arrondissant les bornes à 0,01 près.

8. Réponse D.

Soit n le nombre de foyers que l'on doit sonder. L'amplitude de l'intervalle de confiance au niveau 0,95 est $\frac{2}{\sqrt{n}}$. On résout : $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}03$ soit $\sqrt{n} \geq \frac{2}{0{,}03}$, soit $n \geq \frac{4}{0{,}0009}$.

Puisque $\frac{4}{0{,}0009} \approx 4\,444{,}4$, le nombre minimal de foyers à sonder est 4 445.

9. Réponses B et C.

On ne peut pas connaître la valeur de p, donc les affirmations A et C sont fausses.

Un intervalle de confiance de p au niveau 0,95 est [0,51 ; 0,59], donc au niveau de confiance 0,95, on peut dire que $p \geq 0{,}51$ et que $p \leq 0{,}59$.