Chapitre 1 Les suites

Réactiver les savoirs, p. 8

Utiliser des exposants

QCM

1. Réponses B et D.

On a $5^{n+2} = 5^n \times 5^2 = 5^n \times 25$.

Ainsi, $5^n - 5^{n+2} = 5^n - 5^n \times 25 = 5^n \times (1 - 25)$ en factorisant par 5^n. Finalement, $5^n - 5^{n+2} = 5^n \times (-24)$.

La réponse B est donc bonne.

De même, comme $5^n = 5^{n+0} = 5^n \times 5^0$, on obtient en factorisant par 5^n : $5^n - 5^{n+2} = 5^n \times (5^0 - 5^2)$.

La réponse D est donc bonne.

2. Réponses A et D.

Pour tout entier naturel n, $3^n = 5^n \times \frac{3^n}{5^n} = 5^n \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

Donc en factorisant par 5^n, on obtient :

$$3^n + 2 \times 5^n = 5^n \times \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2\right).$$

La réponse A est donc bonne.

De même, $5^n = 3^n \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$. Donc en factorisant par 3^n :

$$3^n + 2 \times 5^n = 3^n \times \left(1 + 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n\right).$$

La réponse D est donc bonne.

3. Réponse D.

En multipliant le numérateur et le dénominateur par 3^n, on obtient :

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{3^n - 3^n \times \frac{1}{3^n}}{3^n \times \frac{1}{3^n}} = \frac{3^n - 1}{1} = 3^n - 1.$$

La réponse D est donc bonne.

Calculer des termes d'une suite et trouver son sens de variation

Vrai ou faux ?

4. a. Faux. On a $u_1 = u_{0+1} = u_0 + 0^2 = -2 + 0 = -2$. Ainsi, $u_1 = -2$.

b. Vrai. Soit n un entier naturel. On a : $u_{n+1} - u_n = n^2$.

Or, $n^2 \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi, (u_n) est croissante.

5. a. Faux. Soit n un entier naturel.

$v_{n+1} = -2(n + 1)^2 + (n + 1) + 1 = -2(n^2 + 2n + 1) + n + 1 + 1$, donc

$$v_{n+1} = -2n^2 - 4n - 2 + n + 2 = -2n^2 - 2n.$$

b. Vrai. Soit n un entier naturel. On a :

$$v_{n+1} - v_n = -2n^2 - 2n - (-2n^2 + n + 1) = -2n^2 - 2n + 2n^2 - n - 1 = -3n - 1.$$

Or, $-3n - 1 < 0$, donc (v_n) est bien une suite décroissante.

6. a. Faux. On a $w_1 = (-1)^1 = -1$ et $w_2 = (-1)^2 = 1$.

Ainsi, $w_2 > w_1$, donc (w_n) n'est pas décroissante.

b. Faux. $w_2 = (-1)^2 = 1 > 0$. Il existe donc au moins un entier naturel n tel que $w_n > 0$.

7. Faux. $u_n > 1\,000$ est équivalent à $4n - 7 > 1\,000$, soit $4n > 1\,007$, soit $n > \frac{1\,007}{4}$, soit $n > 251{,}75$.
Comme n est un entier, c'est à partir du rang 252 que u_n est supérieur à 1 000.
On aurait pu aussi écrire que $u_{248} = 4 \times 248 - 7 = 985 < 1\,000$, donc que l'inégalité $u_n > 1\,000$ n'est pas vérifiée pour le rang 248.

Travailler avec les suites arithmétiques et géométriques

Exercices

8. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 4 - (5n - 4) = 5$.
Donc (u_n) est arithmétique de raison 5.

9. $v_{25} = v_0 + 25 \times r$, où r est la raison de la suite arithmétique (v_n). Ainsi, $v_{25} = -5 + 25 \times 3 = 70$.

10. a. Comme (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$, on a, pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

b. On a $S_n = 3 + 3 \times \frac{1}{5} + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cdots + 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

En factorisant par 3, $S_n = 3 \times \left(1 + \frac{1}{5} + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$.

Or, pour tout réel q différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ainsi, en remplaçant q par $\frac{1}{5}$:

$$S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}},$$

soit :

$$S_n = 3 \times \frac{5}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = \frac{15}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right).$$

11. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} = 4 \times 3^n \times 3 = w_n \times 3$.
Ainsi, (w_n) est géométrique, de raison 3.
$w_0 = 4 \times 3^0 = 4$. Donc le premier terme est 4.

12. Pour montrer que (t_n) n'est pas arithmétique, on montre que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante. On a $t_2 - t_1 = 4$ et $t_3 - t_2 = 9$. Comme $4 \neq 9$, (t_n) n'est pas arithmétique.
De même, pour montrer que (t_n) n'est pas géométrique, on montre que pour passer d'un terme au suivant on ne multiplie pas toujours par le même nombre : $t_2 = 3 \times t_1$ mais $t_3 \neq 3 \times t_2$. Ainsi, (t_n) n'est pas géométrique.

Faire le point, p. 30

Déterminer la limite d'une suite et recherche d'un seuil

1. Réponse C.

On obtient une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Soit n un entier naturel différent de 0. On factorise au numérateur et au dénominateur par n :

$$u_n = \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{5}{n}+1\right)} = \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{5}{n}+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{n}+1\right) = 1$, donc par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. Réponses B et D.

On obtient une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ».

Soit n un entier naturel différent de 0. On factorise par n^2 :

$$u_n = n^2\left(-2+\frac{4}{n}+\frac{8}{n^2}\right).$$

Or $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(-2+\frac{4}{n}+\frac{8}{n^2}\right) = -2$, donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Ainsi, (u_n) diverge vers $-\infty$.

3. Réponse C.

Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{(-4)^n\times(-4)}{5^n} = -4\times\left(\frac{-4}{5}\right)^n$.

Or $-1 < \frac{-4}{5} < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-4}{5}\right)^n = 0$.

Par produit, (u_n) converge vers 0.

Utiliser les théorèmes de comparaison

4. Réponse C.

On obtient une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Soit n un entier naturel différent de 0. On a : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc (u_n) converge vers 0.

5. Réponses A et D.

Il faut déterminer, parmi les suites proposées, celles qui divergent vers $-\infty$.

On aura le résultat par le théorème de comparaison.

On a $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-2\right) = -2$, donc par produit : $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-2\right) = -\infty$.

La réponse A est donc bonne.

$\lim_{n\to+\infty} -1\,000+\frac{1}{n} = -1\,000$. Donc la réponse B est fausse.

Comme $-2 < -1$, la suite de terme général $(-2)^n$ n'a pas de limite. Donc la réponse C est fausse.

Pour la suite proposée à la réponse D, on a une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{-\infty}$ ».

Soit n un entier naturel non nul. On factorise par n au numérateur et au dénominateur :

$$v_n = \frac{n\left(4+n-\frac{5}{n}\right)}{n\left(-1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{4+n-\frac{5}{n}}{-1+\frac{3}{n}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(4+n-\frac{5}{n}\right)=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{n}\right)=-1$, donc par quotient : $\lim_{n\to+\infty}v_n=-\infty$.
Donc la réponse D est bonne.

6. Réponses A et C.
Il faut déterminer, parmi les suites proposées, celles qui convergent vers –1.
On aura le résultat par le théorème des gendarmes.
Pour tout entier naturel non nul *n* :

$$\frac{1-n}{n+2}=\frac{n\left(\frac{1}{n}-1\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\frac{1}{n}-1}{1+\frac{2}{n}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)=-1$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1$, donc par quotient : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-n}{n+2}\right)=-1$.
Ainsi, la réponse A est bonne.
Pour tout entier naturel *n* pair, on a $\cos(n\pi)=1$, donc la suite de terme général $\cos(n\pi)$ ne converge pas vers –1. La réponse B est donc fausse.
Comme 3 > 1, on a $\lim_{n\to+\infty}3^n=+\infty$, donc par quotient, $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3^n}=0$.
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{3^n}\right)=-1$.
Donc la réponse C est bonne.
Pour tout entier naturel non nul *n* :

$$\frac{n+1}{n+3}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)$, donc par quotient : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)=1$.
La réponse D est donc fausse.

7. Réponse C.
Pour tout entier naturel n, $-1\leq\cos(n)\leq 1$, donc $2\leq 3+\cos(n)\leq 4$.
Ainsi, en multipliant par n^2 qui est positif, $2n^2\leq u_n\leq 4n^2$.
Or $\lim_{n\to+\infty}2n^2=+\infty$, donc par le théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
Ainsi, (u_n) diverge vers $+\infty$.

Travailler avec des suites majorées ou minorées

8. Réponses C et D.
Pour tout entier naturel n, $-1\leq\cos(n)\leq 1$ et $-1\leq\sin(n)\leq 1$. Ainsi, $-2\leq\cos(n)+\sin(n)\leq 2$.
Ainsi, la réponse C est bonne.
On en déduit immédiatement que la réponse D est bonne.
De plus, $\cos(1)+\sin(1)\approx 1{,}4$. Donc la suite (u_n) n'est pas majorée par 1.
Donc les réponses A et B sont fausses.

9. Réponses A et D.
Montrons par récurrence que (u_n) est majorée par –4.
Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $u_n\leq -4$ ».
Initialisation. $u_0=-8\leq -4$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit un entier naturel p tel que $P(p)$ soit vraie, c'est-à-dire tel que $u_p\leq -4$. On a alors :

$$\frac{1}{4}u_p-3\leq\frac{1}{4}\times(-4)-3,$$

c'est-à-dire $u_{p+1}\leq -4$. Ainsi, $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
On peut ainsi montrer que (u_n) est croissante : pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n - 3.$$

Or, pour tout entier naturel n, $u_n \leq -4$, donc $-\frac{3}{4}u_n \geq -\frac{3}{4} \times (-4)$, c'est-à-dire $-\frac{3}{4}u_n \geq 3$.
Par conséquent, $\frac{3}{4}u_n - 3 \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi, (u_n) est croissante.
Comme on a montré également que (u_n) est majorée, la réponse A est bonne. De plus, par le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) est convergente. Donc la réponse D est bonne.

10. Réponses B et C.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2$. Or, $u_n^2 \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Ainsi, (u_n) est décroissante. La réponse A est alors fausse.
Montrons que la suite est minorée par 0. Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $u_n \geq 0$ ».
Initialisation. $u_0 = 0{,}5 \geq 0$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit un entier naturel p tel que $P(p)$ soit vraie, c'est-à-dire tel que $u_p \geq 0$. On sait que (u_n) est décroissante et $u_0 = 0{,}5$, donc $u_p \leq 0{,}5$. Par conséquent, $1 - u_p \geq 0$.
Ainsi, en multipliant par u_p qui est positif d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $u_p(1 - u_p) \geq 0$, soit $u_{p+1} \geq 0$.
Ainsi, $P(p+1)$ est vraie.
Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Donc (u_n) est minorée par 0.
Donc la réponse B est vraie.
De plus, par le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) est convergente.
Donc la réponse C est bonne.
Notons l la limite de cette suite.
On a $u_1 = u_0(1 - u_0) = 0{,}5(1 - 0{,}5) = 0{,}25$ et (u_n) est décroissante, donc $l \leq 0{,}25$.
Par conséquent, la réponse D est fausse.