Chapitre 2 Limites et continuité

Réactiver les savoirs, page 42

Déterminer la limite d'une suite

QCM

1. Réponses B et D.

● $n - n^2 = n(1 - n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - n) = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$: la réponse B est juste, les réponses A et C sont fausses.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$: la réponse D est juste.

2. Réponses B, C et D.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$: la réponse A est fausse.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$: la réponse B est juste.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = -\infty$: la réponse C est juste.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-v_n) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + (-v_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = -\infty$: la réponse D est juste.

3. Réponses A et C.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$: la réponse A est juste.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$: la réponse B est fausse.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = -\infty$: la réponse C est juste.

● $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = -\infty$: la réponse D est fausse.

Comparer des expressions

Vrai ou faux ?

4. Vrai. Pour tout réel x différent de 1, $\dfrac{3}{1-x} - 5 = \dfrac{3-5(1-x)}{1-x} = \dfrac{-2+5x}{1-x}$.

5. Vrai. Pour tout réel x non nul, $\dfrac{5x}{x^2+1} = \dfrac{5x}{x(x+\frac{1}{x})} = \dfrac{5}{x+\frac{1}{x}}$.

6. Faux. Par exemple, pour $x = 0{,}5$, $x > x^2$ (car $x^2 = 0{,}25$).

7. Vrai. Pour tout réel x positif, $x\sqrt{x} \geq 0$ donc $x\sqrt{x} + 2x + 1 \geq 2x + 1$.

8. Faux. Par exemple, pour $x = -1$, $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{2}{x}$ (car $\dfrac{1}{x} = -1$ et $\dfrac{2}{x} = -2$).

Exploiter un tableau de variation ou une courbe

Exercices

9. a. $f'(x) = 3x^2 - 12$.

b. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$.

$f'(x)$ s'annule en -2 et en 2, est négatif sur $[-2 ; 2]$ et est positif sur $[-3 ; -2]$ et sur $[2 ; 3]$.

x	-3		-2		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\nearrow$	14	$\searrow$	-18	$\nearrow$	-11

c. Le minimum de f sur $[-3 ; 2]$ est -18.

10. a. $-3 \leq g(x) \leq 5$.

b. L'équation $g(x) = k$ a au moins une solution lorsque k appartient à $[-3 ; 5]$.

Faire le point, p. 64

Déterminer les limites d'une fonction avec les théorèmes généraux

1. Réponses A et D.

● $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+9) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$: la réponse A est juste et la réponse B est fausse.

● $f(x) = x^3\left(4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^3}\right) = 4$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: la réponse D est juste et la réponse C est fausse.

2. Réponses A et C.

● $\lim\limits_{x\to-\infty} [x(x^2+1)] = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x(x^2+1)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$. Donc la droite d'équation $y = 5$ est une asymptote à la courbe C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

La réponse C est juste et la réponse D est fausse.

● $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} [x(x^2+1)] = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x(x^2+1)} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$. Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe C_f.

La réponse A est juste.

● $\lim\limits_{x\to-1} [x(x^2+1)] = -2$ donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 4{,}5$. Cette limite n'est pas infinie donc la droite d'équation $x = -1$ n'est pas une asymptote à la courbe C_f : la réponse B est fausse.

3. Réponses B et C.

● $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$: la droite d'équation $y = 5$ est une asymptote à la courbe C_f, mais pas la droite d'équation $y = 4$. La réponse A est fausse.

● $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 4$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ donc la droite d'équation $y = 4$ est une asymptote à la courbe C_f en $-\infty$ et en $+\infty$. La réponse B est juste.

● $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ donc la droite d'équation $y = 4$ est une asymptote à la courbe C_f en $-\infty$ et en $+\infty$. La réponse C est juste.

● $f(x) = \dfrac{4x}{1+\frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (4x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $y = 4$ n'est pas une asymptote à C_f : la réponse D est fausse.

4. Réponse A.

Le polynôme du second degré $x^2 - 4x + 3$ a pour racines 1 et 3.
Sur l'intervalle $]1\,;\,3[$, $x^2 - 4x + 3 < 0$.

- $\lim\limits_{x\to1}(x-2) = -1$ et $\lim\limits_{x\to1}(x^2-4x+3) = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$: la réponse A est juste et la réponse B est fausse.
- $\lim\limits_{x\to3}(x-2) = 1$ et $\lim\limits_{x\to3}(x^2-4x+3) = 0^-$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$: les réponses C et D sont fausses.

5. Réponses B, C et D.

- $\lim\limits_{x\to2}(2-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to0}\sqrt{X} = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{f(x)} = +\infty$: la réponse A est fausse et la réponse C est juste.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)} = 0$: les réponses B et D sont justes.

Utiliser les théorèmes de comparaison

6. Réponses B et C.

- $f(x) \leq 1 - x^3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x^3) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$: la réponse A est fausse et la réponse B est juste.
- $-x^3 \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$: la réponse C est juste et la réponse D est fausse.

7. Réponses A et D.

- $2+\dfrac{1}{x^2-1} \leq f(x) \leq 2+\dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x-1}\right) = 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$: la réponse A est juste et la réponse B est fausse.
- $2+\dfrac{1}{x^2-1} \leq f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(2+\dfrac{1}{x^2-1}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$: la réponse C est fausse et la réponse D est juste.

8. Réponses A et C.

$1 + x \leq f(x) \leq 1 + 3x$, donc pour tout réel $x < 0$, $\dfrac{1+x}{x} \geq \dfrac{f(x)}{x} \geq \dfrac{1+3x}{x}$, soit $\dfrac{1}{x}+3 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}+1$: la réponse A est juste et la réponse B est fausse.

$\dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}+1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{1}{x}+1\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$: la réponse C est juste et la réponse D est fausse.

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

9. Réponse C.

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$.
$f'(x) = -6x^2 + 2x - 1$.
$f'(x)$ n'a pas de racine et pour tout réel x, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
Comme $f(1) = -1$, pour tout réel x de $[1\,;+\infty[$, $f(x) \leq -1$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[1\,;+\infty[$: la réponse C est juste et les réponses A, B et D sont fausses.

10. Réponse B.

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = x^4 + x^2$.
$f'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$.

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'équation $f(x) = 6$ n'a pas de solution dans $[-1\,;0]$, et a une unique solution dans $[0\,;+\infty[$.
Avec la calculatrice, $f(1{,}4) \approx 5{,}8$ et $f(1{,}6) \approx 9{,}1 > 6$ donc $1{,}4 \leq \alpha \leq 1{,}6$: la réponse B est juste et les réponses A, C et D sont fausses.

11. Réponses B et C.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x$.

$f'(x) = -3x^2 + 3$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

● L'équation $f(x) = 2$ a deux solutions : une solution dans $]-\infty\,;-1]$ et le réel 1 : la réponse A est fausse.
● L'équation $f(x) = 3$ n'a pas de solution dans $[-1\,;+\infty[$ et, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, a une unique solution dans $]-\infty\,;-1]$: la réponse B est juste.
● L'équation $f(x) = -5$ n'a pas de solution dans $]-\infty\,;1]$ et, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, a une unique solution dans $[1\,;+\infty[$: la réponse C est juste.
● D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution dans chacun des intervalles $]-\infty\,;-1]$, $[-1\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$: la réponse D est fausse.