Chapitre 3 Fonctions trigonométriques et dérivation

Réactiver les savoirs, p. 76

Dériver une fonction

QCM

1. Réponses A et C.

$g'(x) = 1\times\sqrt{x} + x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$: la réponse A est juste.

$g'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x})^2+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$: la réponse C est juste.

Les réponses B et D sont fausses.

2. Réponses A et D.

$h'(x) = 2u'(x)u(x)$ avec $u(x) = x^2 + 3$ et $u'(x) = 2x$.

Donc $h'(x) = 2\times 2x\times(x^2+3) = 4x(x^2+3) = 4x^3 + 12x$.

Les réponses A et D sont justes et les réponses B et C sont fausses.

3. Réponse B.

$k'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 5$ et $u'(x) = 2x$.

$k'(x) = -\frac{2x}{(x^2+5)^2}$: la réponse B est juste et les réponses A, C et D sont fausses.

Utiliser le cercle trigonométrique

Exercices

4. 1.a. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

b. $\sin(-x) = -\sin(x)$

c. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

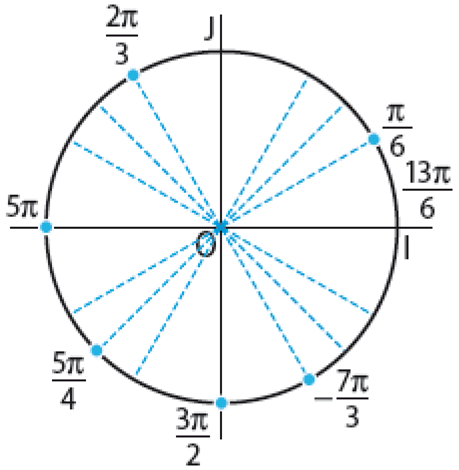
d. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

2. Sur $[0 ; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ et sur $[\pi ; 2\pi]$, $\sin(x) \leq 0$.

Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et sur $[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi]$, $\cos(x) \geq 0$

Sur $[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$, $\cos(x) \leq 0$.

5.



x	5π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$
cos(x)	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin(x)	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

x	$-\frac{7\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
cos(x)	$\frac{1}{2}$	0
sin(x)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

6. 1. Les solutions sont $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

2. Les solutions sont $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$.

Déterminer des limites

Vrai ou faux ?

7. Vrai.

$\frac{-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

8. Faux. $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$ donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=1$.

9. Faux. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}3=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)^2=0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{3}{(x-1)^2}=+\infty$.

10. Vrai. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}(3-x)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to0}\sqrt{X}=0$ donc par composition $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}}\sqrt{3-x}=0$.

Pour faire le point, p. 93

Calculer la dérivée d'une fonction

1. Réponse B.

$f'(x) = 4u'(x)u^3(x)$ avec $u(x) = 5 - 2x$ et $u'(x) = -2$.

Donc $f'(x) = 4\times(-2)\times(5-2x)^3 = -8(5-2x)^3$.

La réponse B est juste et les réponses A, C et D sont fausses.

2. Réponses B et D.

$f(x) = (2x-1)^{-3}$.

$f'(x) = -3u'(x)u^{-4}(x)$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $u'(x) = 2$.

Donc $f'(x) = -3\times 2\times(2x-1)^{-4} = -6(2x-1)^{-4} = \dfrac{-6}{(2x-1)^4}$.

Les réponses B et D sont justes et les réponses A et C sont fausses.

3. Réponses A et D.

$f'(x) = 2\times\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = x + 2$ et $u'(x) = 1$.

Donc $f'(x) = 2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}$.

Les réponses A et D sont justes et les réponses B et C sont fausses.

4. Réponses A et C.

$f'(x) = -v'(-x)$ avec $v'(x) = x^2$, donc $f'(x) = -(-x)^2 = -x^2$.

Les réponses A et C sont justes et les réponses B et D sont fausses.

5. Réponse B.

$f'(x) = -\sin(x) - \cos(x)$: la réponse B est juste et les réponses A, C et D sont fausses.

6. Réponses B et D.

$f'(x) = 3\times(-2\sin(2x)) = -6\sin(2x)$.

Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $f'(x) = -12\sin(x)\cos(x)$.

Les réponses B et D sont justes et les réponses A et C sont fausses.

Étudier des fonctions trigonométriques

7. Réponses B et C.

Pour tout réel x, $f(-x) = 3\times(-x) - \sin(-x) = -3x - (-\sin x) = -3x + \sin x$.

La réponse B est juste.

$f(-x) = -(3x - \sin x) = -f(x)$: la réponse C est juste.

Les réponses A et D sont fausses.

8. Réponses A et D.

Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$ donc la courbe est symétrique par rapport à O : la réponse A est juste et les réponses B et C sont fausses.

Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq -\sin x \leq 1$ donc $3x - 1 \leq 3x - \sin x \leq 3x + 1$.

Par suite, $3x - 1 \leq f(x)$ donc la courbe C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = 3x - 1$: la réponse D est juste.

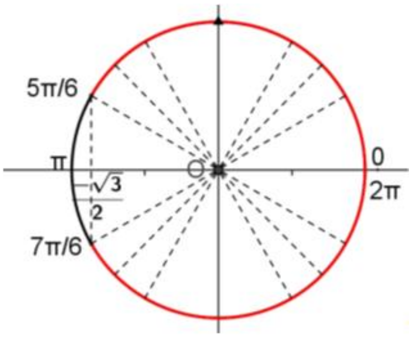
9. Réponses A et B.
Pour tout réel x, $f(x + 2\pi) = 3(x + 2\pi) - \sin(x + 2\pi)$.
$f(x) = 3x + 6\pi - \sin x = (3x - \sin x) + 6\pi = f(x) + 6\pi$: les réponses A et B sont justes et les réponses C et D sont fausses.

10. Réponse A.
Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$
donc $3x - 1 \leq 3x - \sin x \leq 3x + 1$. D'où $3x - 1 \leq f(x) \leq 3x + 1$.
$3x - 1 \leq f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La réponse A est juste et les réponses B, C et D sont fausses.

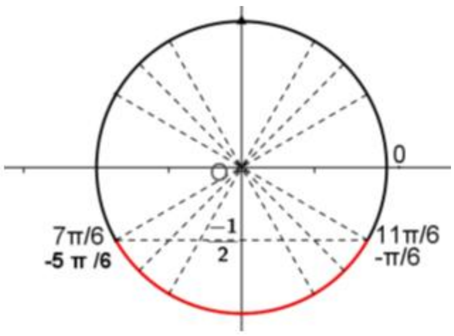
11. Réponse C.
Pour tout réel x non nul, $\frac{f(x)}{x} = \frac{3x - \sin x}{x} = 3 - \frac{\sin x}{x}$.
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} (3 - \frac{\sin x}{x}) = 2$: la réponse C est juste et les réponses A, B et D sont fausses.

Étudier le signe d'une expression trigonométrique

12. Réponse A.
D'après le cercle trigonométrique, dans $[0 ; 2\pi[$, l'inéquation $\cos x \geq \frac{-\sqrt{3}}{2}$ a pour ensemble de solutions $[0 ; \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6} ; 2\pi[$. L'affirmation A est juste et les affirmations B, C et D sont fausses.



13. Réponses A et C.
$2\sin x + 1 < 0$ si, et seulement si, $\sin x < \frac{-1}{2}$.



D'après le cercle trigonométrique, sur $]\frac{-5\pi}{6} ; \frac{-\pi}{6}[$ et sur $]\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}[$, $\sin x < \frac{-1}{2}$: les réponses A et C sont justes et les réponses B et D sont fausses.