Chapitre 4 Fonction exponentielle

Réactiver les savoirs, p. 104

Transformer une écriture avec des exposants entiers

QCM

1. Réponses B et C.

$a^2 \times a^{-3} = a^{2+(-3)} = a^{-1}$: la réponse B est juste.

$a^2 \times a^{-3} = a^2 \times \frac{1}{a^3} = \frac{a^2}{a^3}$: la réponse C est juste.

Les réponses A et D sont fausses.

2. Réponses A et D.

$(a^2)^{-3} = a^{2\times(-3)} = a^{-6}$: la réponse A est juste et les réponses B et C sont fausses.

$(a^{-2})^3 = a^{-2\times3} = a^{-6}$. Donc $(a^2)^{-3} = (a^{-2})^3$: la réponse D est juste.

3. Réponses B et D.

$\frac{1}{a^{-1}} = a^1 = a$: les réponses B et D sont justes, et les réponses A et C sont fausses.

4. Réponses A et D.

$\frac{a^4 \times a^{-2}}{a^3} = \frac{a^{4-2}}{a^3} = \frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}$: les réponses A et D sont justes, et les réponses B et C sont fausses.

Dériver une fonction composée

Vrai ou faux ?

5. Vrai.

$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = 2x + 3$ et $u'(x) = 2$.

Donc $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

6. Faux.

$f'(x) = 6u'(x)u^5(x)$ avec $u(x) = 3x - 5$ et $u'(x) = 3$.

Donc $f'(x) = 6 \times 3 \times (3x-5)^5 = 18(3x-5)^5$.

7. Vrai.

Cette fonction est de la forme $x \mapsto f(ax + b)$ avec $a = 3$ et $b = -1$.
Sa dérivée est $x \mapsto af'(ax + b)$, et donc $x \mapsto 3f'(3x - 1)$.

8. Faux.

Cette fonction est de la forme $x \mapsto f(ax + b)$ avec $a = -1$ et $b = 2$.
Sa dérivée est $x \mapsto af'(ax + b)$, et donc $x \mapsto -f'(2 - x)$.

9. Vrai.

Cette fonction est de la forme $x \mapsto f(ax + b)$ avec $a = -1$ et $b = 0$.
Sa dérivée est $x \mapsto af'(ax + b)$, et donc $x \mapsto -f'(-x)$.

10. Vrai.
La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$.
Comme $f' = f$, elle est égale à $x \mapsto -f(-x)$.
Donc $g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f(-x)) = 0$.

Utiliser les variations d'une fonction

Exercices

11. 1. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

2. $f'(x)$ est un polynôme du second degré. Son discriminant est égal à 16 et ses racines sont $-\frac{1}{3}$ et 1.

x	-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. D'après le tableau de variation, pour tout réel $x \geq -1$, $f(x) \geq 0$.
b. Pour tout réel x de $[-1 ; +\infty[$, $x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0$ donc $x^3 \geq x^2 + x - 1$.

12. 1. On déduit des variations de la fonction g que, pour tout réel x, $g(x) \leq g(2)$.
Or $g(2) = -1$, donc $g(x) \leq -1$, et par conséquent $g(x) < 0$.
Ainsi pour tout réel x, $f(x) + x^2 < 0$ et donc $f(x) < -x^2$.
2. D'après l'un des théorèmes de comparaison des limites :
$f(x) < -x^2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
$f(x) < -x^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Faire le point, p. 124

Transformer une expression avec des exponentielles

1. Réponses A et C.

● $1-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^{-x}+1-(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^{-x}+1-e^{-x}+1}{e^{-x}+1}=\dfrac{2}{e^{-x}+1}$: la réponse A est juste.

● $1-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{2}{e^{-x}+1}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{e^{x}}+1}=\dfrac{2}{\dfrac{1+e^{x}}{e^{x}}}=\dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}$: la réponse C est juste.

● Pour $x = 0$, $1-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=1-\dfrac{e^{0}-1}{e^{0}+1}=1$: la réponse B est fausse.

● $1-\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{2}{e^{-x}+1}$ et $\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}=\dfrac{2}{1+e^{x}}$: la réponse D est fausse (car pour tout réel x non nul, $e^{-x} \neq e^{x}$).

2. Réponses B et C.

● $(e^{-x} + 1)(e^{x} - 1) = e^{-x} \times e^{x} - e^{-x} + e^{x} - 1 = 1 - e^{-x} + e^{x} - 1$.
Donc $(e^{-x} + 1)(e^{x} - 1) = -e^{-x} + e^{x}$: la réponse B est juste.
Pour tout réel x non nul, $e^{-x} \neq e^{x}$ donc $-e^{-x} + e^{x} \neq 0$ et $(e^{-x} + 1)(e^{x} - 1) \neq 0$: la réponse A est fausse.
● $e^{x}(1 - e^{-2x}) = e^{x} - e^{x} \times e^{-2x} = e^{x} - e^{x-2x} = e^{x} - e^{-x}$.
Comme $(e^{-x} + 1)(e^{x} - 1) = -e^{-x} + e^{x}$, la réponse C est juste.
● Pour $x = 1$, $e^{-2x} - 1 = e^{-2} - 1$.
$(e^{-1} + 1)(e^{1} - 1) = e^{1}(1 - e^{-2})$.
Donc $e^{-2} - 1 \neq (e^{-1} + 1)(e^{1} - 1)$, car $e^{1} \neq -1$: la réponse D est fausse.

3. Réponses A, C et D.

● $e^{2x}(e^{-3} + e^{-x}) = e^{2x} \times e^{-3} + e^{2x} \times e^{-x} = e^{-3+2x} + e^{x}$.
La réponse A est juste.
● Pour $x = 0$, $e^{-3+2x} + e^{x} = e^{-3} + e^{0} = e^{-3} + 1$.
$e^{-3+3x} = e^{-3}$: la réponse B est fausse.
● $e^{-3}(e^{2x} + e^{x+3}) = e^{-3} \times e^{2x} + e^{-3} \times e^{x+3} = e^{-3+2x} + e^{x}$.
La réponse C est juste.
● $e^{x}(e^{-3} \times e^{x} + 1) = e^{x} \times e^{-3} \times e^{x} + e^{x} = e^{-3+2x} + e^{x}$.
La réponse D est juste.

Résoudre une équation ou une inéquation

4. Réponses A et C.

$e^{2x} - e^{x+1} = 0$ équivaut à $(e^{x})^2 - e^{x} \times e = 0$ et donc à $e^{x}(e^{x} - e) = 0$: la réponse A est juste.
Cette équation est équivalente à $e^{x} - e = 0$ (car pour tout réel x, $e^{x} \neq 0$) et donc à $e^{x} = e$, soit $x = 1$.
La réponse C est juste, et les réponses B et D sont fausses.

5. Réponses A et C.

$e^{2x} - 1 < 0$ équivaut à $e^{2x} < e^{0}$ et donc à $2x < 0$, soit $x < 0$. L'ensemble des solutions est l'intervalle $]-\infty ; 0[$.
Les réponses A et C sont justes, et les réponses B et D sont fausses.

6. Réponse A.

$(e^{-x} - 1)(e^{x} + 2) \geq 0$ équivaut à $e^{-x} - 1 \geq 0$ (car pour tout réel x, $e^{x} + 2 > 0$).
$e^{-x} - 1 \geq 0$ équivaut à $e^{-x} \geq 1$ et donc à $-x \geq 0$, soit $x \leq 0$.
La réponse A est juste, et les réponses B, C et D sont fausses.

7. Réponses A et C.
$e^{-x} - e^{-x+2} = e^{-x}(1 - e^2)$. Comme pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, $e^{-x} - e^{-x+2}$ est du signe de $1 - e^2$.
La réponse A est juste et la réponse B est fausse.
$2 > 0$ donc $e^2 > e^0$, soit $1 - e^2 < 0$.
Par conséquent, pour tout réel x, $e^{-x} - e^{-x+2} < 0$: la réponse C est juste et la réponse D est fausse.

Étudier une fonction

8. Réponse D.

$f'(x) = \dfrac{3e^x(e^x+1)-3e^x\times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$: la réponse D est juste et les réponses A, B et C sont fausses.

9. Réponses C et D.

- $3-\dfrac{3}{e^x+1} = \dfrac{3(e^x+1)-3}{e^x+1} = \dfrac{3e^x}{e^x+1} = f(x)$: la réponse C est juste.
- $\dfrac{3}{e^{-x}+1} = \dfrac{3e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \dfrac{3e^x}{1+e^x} = f(x)$: la réponse D est juste et la réponse A est fausse.
- $f(0) = \dfrac{3e^0}{e^0+1} = \dfrac{3}{2}$ et pour $x = 0$, $3 + 3e^0 = 3 + 3 = 6$: la réponse B est fausse.

10. Réponse C.

$f(x) = 3-\dfrac{3}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x+1} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$: la réponse C est juste et les réponses A, B et D sont fausses.

11. Réponse B.

$g'(x) = 1\times e^{-x} + (x-1)\times(-e^{-x}) = (1-x+1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$: la réponse B est juste et les réponses A, C et D sont fausses.

12. Réponse A.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x - 1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$: la réponse A est juste et les réponses B, C et D sont fausses.

13. Réponse B.

$g(x) = xe^{-x} - e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} - e^{-x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$: la réponse B est juste et les réponses A, C et D sont fausses.

14. Réponses A et B.

- $g'(x) = (2-x)e^{-x}$. Comme pour tout réel x, $e^{-x} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $2 - x$.

Sur $]-\infty\,;2]$, $g'(x) \geq 0$ et sur $[2\,;+\infty[$, $g'(x) \leq 0$.
Donc la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
Par conséquent, la fonction admet un maximum en 2 et pour tout réel x, $g(x) \leq g(2)$.
Comme $g(2) = e^{-2}$, pour tout réel x, $g(x) \leq e^{-2}$: la réponse A est juste.

- Pour tout réel x, $g(x) \leq e^{-2}$ et $e^{-2} < 1$ donc $g(x) < 1$: la réponse B est juste.
- Pour $x = 2$, $g(2) < x - 1$ car $g(2) = e^{-2}$; $x - 1 = 2 - 1 = 1$ et $e^{-2} < 1$: la réponse C est fausse.
- $g(0) = -1$: la réponse D est fausse.