Chapitre 6 Calcul intégral

Réactiver les savoirs, p. 168

Calculer l'aire de certaines surfaces

Vrai ou faux ?

1. Faux.
L'aire du triangle ABC est égale à 1 unité d'aire.
L'aire du trapèze OABD est égale à 3 unités d'aire donc la moitié de cette aire est égale à 1,5 unité d'aire. L'aire du triangle ABC n'est donc pas égale à la moitié de l'aire du trapèze OABD.

2. Vrai.
La surface colorée est celle d'un trapèze de hauteur 1 (car $k + 1 - k = 1$) et de bases $f(k)$ et $f(k + 1)$, l'aire de cette surface est donc égale à $1\times\frac{f(k)+f(k+1)}{2}$. (On peut aussi considérer que cette surface est la réunion du rectangle de largeur 1 et de hauteur $f(k)$ et du triangle rectangle de côtés de longueur 1 et $f(k + 1) - f(k)$.)

Calculer une dérivée

QCM

3. Réponses A et D.
La dérivée de la fonction f est la fonction $f\,'$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,'(x) = 4x$. Les fonctions g et j ont la même dérivée que la fonction f puisque leurs dérivées sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g'(x) = 2\times 2x = 4x$ et $j'(x) = 2(2x) = 4x$. Par ailleurs $h'(x) = 4$ et $i'(x) = 4$ donc les fonctions h et i n'ont pas la même dérivée que la fonction f.

4. Réponses B et D.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est le produit des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$ et $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 1$ et $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables et $f\,'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x})$, donc $f\,'(x) = (1- x) \times \mathrm{e}^{-x}$.
La réponse D est donc bonne.
Par ailleurs, $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}$ donc $f\,'(x) = \frac{1-x}{\mathrm{e}^{x}}$: la réponse B est également bonne.
Par contre, les réponses A et C sont fausses.

5. Réponse D.
La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\cos x)^2$ est de la forme u^2 où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \cos x$. On sait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $u'(x) = -\sin x$, de plus la dérivée d'une fonction de la forme u^2 est $2uu'$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -2\cos x\sin x$.

6. Réponses B et C.
La fonction f est de la forme ln$u$ avec $u(x) = 4x + 3$. Sa dérivée est la fonction f' définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f'(x) = \frac{4}{4x+3}$. La fonction g n'a pas la même dérivée car $g'(x) = \frac{4}{4x}$.
La dérivée de la fonction h est la fonction h' telle que $h'(x) = \frac{8}{8x+6} = \frac{2\times 4}{2(4x+3)} = \frac{4}{4x+3}$
donc $h'(x) = f'(x)$.
La dérivée de la fonction i est la fonction i' telle que $i'(x) = \frac{1}{x+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{4x+3}{4}} = \frac{4}{4x+3}$ donc $i'(x) = f'(x)$.
Par contre, la dérivée de la fonction j est la fonction j' telle que $j'(x) = 4 \times i'(x) = 4 \times f'(x)$.
La fonction j n'a donc pas la même dérivée que la fonction f.

Transformer des expressions

Exercices

7. Pour tout réel x de $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$, $\frac{3}{x+1} - 1 = \frac{3}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{3-(x+1)}{x+1} = \frac{3-x-1}{x+1} = \frac{2-x}{x+1}$
donc, pour tout réel x de $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$, $\frac{3}{x+1} - 1 = \frac{2-x}{x+1}$.

8. Pour tout réel x différent de 0 et -1, $2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{x(x+1)} - \frac{1(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x^2+2x-x-1+x}{x^2+x}$
donc, pour tout réel x différent de 0 et -1, $2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+2x-1}{x^2+x}$.

9. Pour tout réel x, $k \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2kx}{x^2+1}$.
On cherche k tel que, pour tout réel x, $2kx = 19x$, soit $2k = 19$ d'où $k = 9{,}5$.

10. Pour tout réel x, $\frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \frac{1}{1+e^{-2x}}$
donc, pour tout réel x, $\frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{1+e^{-2x}}$.

Faire le point, p. 190

Déterminer une primitive d'une fonction

1. Réponse A.

Les primitives de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par *f*(*x*) = $8x^3 - 1$ sont les fonctions *F* définies sur $\mathbb{R}$ par

F(*x*) = 8× $\left(\frac{1}{4}x^4\right)$ – *x* + *k* soit *F*(*x*) = $2x^4$ – *x* + *k*. On cherche *k* tel que *F*(1) = 0 c'est-à-dire *k* tel que 2×1^4 – 1 + *k* = 0, soit 2 – 1 + *k* = 0 soit *k* = –1.

La primitive de la fonction *f* qui s'annule en 1 est donc la fonction *F* définie sur $\mathbb{R}$ par

F(*x*) = $2x^4$ – *x* – 1. La réponse A est donc la seule bonne réponse.

2. Réponses B et D.

f est presque de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec u(*x*) = 2*x*. On écrit *f*(*x*) en faisant apparaître la forme remarquable $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$, c'est-à-dire ici $2\mathrm{e}^{2x}$, ainsi *f*(*x*) = $\frac{1}{2}(2\mathrm{e}^{2x})$.

Les primitives de la fonction *f* sont donc les fonctions *F* définies sur $\mathbb{R}$ par *F*(*x*) = $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ + *k*.

Les réponses B et D sont bonnes et les réponses A et C sont fausses.

3. Réponses B, C et D.

Une méthode pour choisir les bonnes réponses pourrait être de dériver chacune des réponses données mais elle serait longue, on va plutôt transformer l'écriture de *f*(*x*) afin de faire apparaître des formes remarquables : *f*(*x*) = (2 – ln*x*) × $\frac{1}{x}$ = 2 × $\frac{1}{x}$ – ln*x* × $\frac{1}{x}$.

f est ainsi la différence de deux fonctions *g et h* définies sur]0 ; +∞[par *g*(*x*) = 2× $\frac{1}{x}$ et *h*(*x*) = ln*x*× $\frac{1}{x}$.
Une primitive de *g* est la fonction *G* définie sur]0 ; +∞[par *G*(*x*) = 2ln*x*.
La fonction *h* est de la forme *uu'* avec *u*(*x*) = ln*x* donc une primitive est la fonction *H* définie sur]0 ; +∞[par *H*(*x*) = $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.
Les primitives de la fonction *f* sont donc les fonctions *F* définies sur]0 ; +∞[par
F(*x*) = 2ln*x* – $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$.
On voit immédiatement que la réponse C est bonne. En transformant légèrement la réponse B on s'aperçoit qu'elle est de la forme précédente avec *k* = $\frac{3}{2}$ donc la réponse B est bonne.

De plus $(\ln x)\left(\frac{4-\ln x}{2}\right) = \frac{\ln x(4-\ln x)}{2} = \frac{4\ln x-(\ln x)^2}{2} = 2\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$ donc la réponse D est également bonne.

Calculer une intégrale

4. Réponses B et C.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par *f*(*x*) = $3x^2 + 1$. Une primitive de *f* est la fonction *F* définie sur $\mathbb{R}$ par

F(*x*) = $x^3 + x$ donc $\int_0^2 (3x^2+1)\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = 2^3 + 2 - 0 = 10$.
La réponse B est donc bonne et la réponse A fausse.
Par linéarité $\int_0^2 (3x^2+1)\mathrm{d}x = 3\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^2 1\mathrm{d}x$.
Or $\int_0^2 1\mathrm{d}x$ = 1(2 – 0) = 2 donc $\int_0^2 (3x^2+1)\mathrm{d}x = 3\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + 2$.
La réponse C est donc bonne et la réponse D fausse.

5. Réponse B.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par *f*(*x*) = $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}$. Une primitive de *f* est la fonction *F* définie sur $\mathbb{R}$ par

F(*x*) = $2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}$ donc $\int_{-2}^4 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\mathrm{d}x$ = *F*(4) – *F*(–2) = $(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 4+1}) - (2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times(-2)+1}) = 2\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}^0 = 2(\mathrm{e}^3 - 1)$
donc la réponse B est bonne et les autres réponses sont fausses.

6. Réponses A, B et C.
La réponse A est bonne par linéarité car $\frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$.
La réponse B est bonne car la variable d'intégration est une variable « muette » qui peut prendre le nom qu'on veut, ainsi $\int_2^4 \frac{3}{x}\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{3}{t}\mathrm{d}t$.
Une primitive de la fonction f définie sur [2 ; 4] par $f(x) = \frac{3}{x}$ est la fonction F telle que $F(x) = 3\ln x$ donc $\int_2^4 \frac{3}{x}\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = 3\ln 4 - 3\ln 2 = 6\ln 2 - 3\ln 2 = 3\ln 2$.
On en déduit que la réponse C est bonne et que la réponse D est fausse.

7. Réponse A.
Une primitive de la fonction f définie sur [0 ; π] par $f(x) = \sin x + 2\cos x$ est la fonction F telle que $F(x) = -\cos x + 2\sin x$.
Donc $\int_0^{\pi} (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi + 2\sin\pi) - (-\cos 0 + 2\sin 0) = -(-1) + 1 = 2$ et ainsi la seule bonne réponse est la réponse A.

Utiliser le calcul d'une intégrale

8. Réponses A, C et D.
La fonction f est positive sur [1 ; 2] donc l'aire de la surface colorée est égale, en unités d'aire, à $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. Une primitive de la fonction f est la fonction F telle que $F(x) = \frac{1}{-3}\mathrm{e}^{-3x+3}$ donc $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \frac{1}{-3}\mathrm{e}^{-3\times 2+3} - \frac{1}{-3}\mathrm{e}^{-3\times 1+3} = \frac{1}{-3}\mathrm{e}^{-3} - \frac{1}{-3}\mathrm{e}^{0} = -\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-3} - 1)$ donc la réponse A est bonne et la réponse B est fausse.
La réponse C est également bonne puisque $-\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{-3} - 1) = \frac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{-3}) = \frac{1-\mathrm{e}^{-3}}{3}$.
Une valeur approchée à 0,01 près de ce quotient est 0,32 donc la réponse D est également bonne.

9. Réponses A, B et D.
Pour tout x de [1 ; e] on a $x\ln x$ positif d'où $I \geq 0$, la réponse A est donc bonne.
La fonction ln est croissante sur [1 ; e] donc, pour tout x de [1 ; e], $\ln 1 \leq \ln x \leq \ln \mathrm{e}$.
Ainsi pour tout x de [1 ; e], $0 \leq x\ln x \leq x$, on en déduit, en utilisant la propriété de comparaison des intégrales, $\int_1^{\mathrm{e}} 0\mathrm{d}x \leq \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x \leq \int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x$ soit $0 \leq I \leq \int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x$, la réponse B est donc bonne.
De plus $\int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$ donc la réponse D est aussi bonne.
Par contre la réponse C est fausse car pour tout x de [1 ; e] on a $x\ln x \geq \ln x$ donc $I \geq \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$.

10. Réponse D.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2\mathrm{e}^t$ est continue et positive sur [0 ; +∞[donc, d'après le théorème fondamental, la fonction F est dérivable sur [0 ; +∞[et $F'(x) = f(x)$ soit $F'(x) = x^2\mathrm{e}^x$.
La seule bonne réponse est la réponse D.