Chapitre 8 Géométrie dans l'espace

Réactiver les savoirs, p. 236

Utiliser des propriétés de géométrie

Exercices

1. Dans le triangle ABC, I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [AC], donc d'après le théorème de la droite des milieux (IJ) est parallèle à (AB).
De plus, comme ABC est rectangle en A, (AB) est perpendiculaire à (AC), donc (IJ) est perpendiculaire à (AC).
La droite (IJ) est donc la perpendiculaire à (AC) passant par le milieu J de [AC] : (IJ) est la médiatrice de [AC].

2. Le point E appartient au cercle de diamètre [AB] donc ABE est un triangle rectangle en E.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABE, on obtient $AB^2 = AE^2 + BE^2$
donc $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 17^2 - 8^2 = 225$, soit $BE = \sqrt{225} = 15$.

3. L'aire de la base est 5^2 cm² soit 25 cm², donc le volume de la pyramide est en cm^3 :
$\frac{1}{3} \times 25 \times 7 = \frac{175}{3}$, soit environ 58,33 cm^3.

Reconnaître les positions relatives de droites et de plans

QCM

4. Réponse D.
Les droites (AF) et (EH) sont non coplanaires sinon A appartiendrait au plan (EFH).

5. Réponses A et C.
Les segments [DF] et [AG] sont les diagonales du cube, les droites (DF) et (AG) se coupent donc au centre du cube. (DF) et (AG) sont donc sécantes et par conséquent également coplanaires.

6. Réponses B et C.
Les droites (AE) et (CG) étant parallèles, les points A, E, C et G sont coplanaires donc les plans (AEG) et (CGE) sont confondus.
Le milieu M de [HF] est aussi le milieu de [EG] car [HF] et [EG] sont les diagonales du carré EFGH.
Le point M appartient donc à la droite (EG) et les plans (AEG) et (AEM) sont confondus.
Finalement les plans (AEM) et (CGE) sont confondus donc également parallèles.

7. Réponses C et D.
Le point C n'appartient pas au plan (ABF) donc la droite (CG) n'est pas incluse dans le plan (ABF).
Le point G n'appartient pas au plan (HFC) donc la droite (CG) n'est pas incluse dans le plan (HFC).
Le plan (AEM) est confondu avec le plan (CGE) et la droite (CG) est incluse dans le plan (CGE) donc (CG) est incluse dans le plan (AME).
Le plan (CDH) est confondu avec le plan (CGH) donc (CG) est incluse dans le plan (CDH).

8. Réponses A, B et D.
Le point B appartient au plan (AEF) et G n'appartient pas à ce plan donc la droite (BG) est sécante au plan (AEF).
Le point G appartient au plan (AEM) et B n'appartient pas à ce plan donc la droite (BG) est sécante au plan (AEM).
Les points B et G appartiennent tous les deux au plan (ABH) donc la droite (BG) est incluse dans le plan (ABH).
Le point B appartient au plan (DBH) et G n'appartient pas à ce plan donc la droite (BG) est sécante au plan (DBH).

Utiliser les vecteurs du plan

Vrai ou faux ?

9. 1. Faux : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$.
2. Vrai : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
Comme O est le milieu de [AC], on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$.

10. 1. Vrai. $\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{DC}$, le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est non nul et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de (AB).

2. Vrai. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3. Faux. Les droites (AC) et (BD) sont sécantes donc les points A, B, C et D ne sont pas alignés.

11. Vrai.

$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ donc $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 5(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

donc $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ donc $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

donc $2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$.

12. Faux.

$\overrightarrow{AB}(3 ; 1)$ et $\overrightarrow{BC}(-9 ; 0)$ donc $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (–3 ; 2).

$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ donc $\begin{cases} x_M - 1 = -3 \\ y_M - 2 = 2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_M = -2 \\ y_M = 4 \end{cases}$.

Le point M a pour coordonnées (–2 ; 4).

Faire le point, p. 261

Reconnaître le parallélisme et l'orthogonalité

1. Réponses B et C.
Comme HFBD est un parallélogramme, les droites (BD) et (HF) sont parallèles. Dans le plan (EFH), les droites (HF) et (EH) sont sécantes donc la droite (BD) n'est pas parallèle à (EH).

(BD) est parallèle à (HF) qui est incluse dans le plan (EFG) donc (BD) est parallèle au plan (EFG).

Le plan (FGO) est aussi le plan (FGD), or D appartient à ce plan et B n'appartient pas à ce plan donc la droite (BD) est sécante au plan (FGD) donc au plan (FGO).

2. Réponse A.
La droite (AE) est perpendiculaire à chacune des droites (EF) et (EH) qui sont deux droites sécantes du plan (EFH) donc (AE) est perpendiculaire au plan (EFH), donc orthogonale à la droite (HF) qui est incluse dans le plan (EFH).

(EFGH) étant un carré, (HF) est perpendiculaire à (EG).
(HF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AEG), donc (HF) est perpendiculaire au plan (AEG).

Les droites (DB) et (HF) sont parallèles, donc (DB) est perpendiculaire au plan (AEG).

Si la droite (BC) était perpendiculaire au plan (AEG), la droite (EH) qui est parallèle à (BC) serait orthogonale à toute droite du plan (AEG) en particulier à (EG), or $\widehat{GEH} = 45°$. Par conséquent, le plan (AEG) n'est pas perpendiculaire à (BC).

Si (AEG) était perpendiculaire à (BH), cette droite serait orthogonale à (AG), les diagonales [BH] et [AG] du parallélogramme ABGH seraient alors perpendiculaires et ABGH serait donc un losange or ce n'est pas le cas car $BG \neq AB$. Le plan (AEG) n'est pas perpendiculaire à la droite (BH).

(AB) et (EF) sont parallèles, donc si (AEG) était perpendiculaire à (AB), la droite (EF) serait perpendiculaire à (AEG) donc orthogonale à (EG), or $\widehat{FEG} = 45°$: (AEG) n'est pas perpendiculaire à (AB).

3. Réponses A et C.
La droite (AC) est parallèle à (EG) qui est perpendiculaire à (HF) donc (AC) est orthogonale à (HF).

Comme $\widehat{GEH} = 45°$, la droite (EG) n'est pas orthogonale à (EH) donc (AC) n'est pas orthogonale à (EH).

La droite (AC) est incluse dans le plan (ABC) qui est perpendiculaire à la droite (DH) donc (AC) est perpendiculaire à la droite (DH).

Comme ABCD est un carré, (AC) est perpendiculaire à (DB).
(AC) est donc orthogonale aux droites (DB) et (DH) qui sont deux droites sécantes du plan (FOH) donc (AC) est orthogonale au plan (FOH).
La droite (BC) est incluse dans le plan (BCG), or $\widehat{ACB} = 45°$ donc (AC) et (BC) ne sont pas orthogonales et par conséquent la droite (AC) n'est pas perpendiculaire à (BCG).

Utiliser les vecteurs de l'espace

4. Réponses A et B.

Soit I le milieu de [AB], $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{IG} = 3\,\overrightarrow{IC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires donc les points I, C et G sont alignés.

Comme $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$, A appartient à (ABC) et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dirigent le plan (ABC), on en déduit que G appartient à (ABC).

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{DG}$ n'est pas égal au vecteur $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CD}$ car $\overrightarrow{CD}$ n'est pas le vecteur nul.

G appartient à (IC), or l'intersection de (IC) et (BCD) est le point C et C est distinct de G, donc G n'appartient pas à (BCD).

5. Réponses A, B et C.

Pour la proposition A : $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

Pour la proposition B : $\vec{w} = -0{,}6\vec{u}$.

Pour la proposition C : $\vec{w} = \frac{3}{4}\vec{u}$.

Pour la proposition D : les triplets (–2 ; 3 ; 1) et (4 ; –6 ; 2) ne sont pas proportionnels donc le vecteur $\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{w}$.

6. Réponse A.

$1{,}5\vec{u}(1{,}5 ; -1{,}5 ; 4{,}5)$ et $0{,}5\vec{w}(0{,}5 ; 8{,}5 ; -8{,}5)$, donc le vecteur $1{,}5\vec{u} + 0{,}5\vec{w}$ a pour coordonnées (2 ; 7 ; –4) et par conséquent $\vec{v} = 1{,}5\vec{u} + 0{,}5\vec{w}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

Le vecteur $-3\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (–1 ; 10 ; 13) donc $\vec{w} \neq -3\vec{u} + \vec{v}$.

Le vecteur $3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées (8 ; 28 ; –16) donc $3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \neq \vec{0}$.

Utiliser un repère de l'espace

7. Réponse B.

On a $\overrightarrow{AB}(3 ; 5 ; -2)$.
$\overrightarrow{OA}(1 ; -2 ; 1)$: les triplets (3 ; 5 ; –2) et (1 ; –2 ; 1) ne sont pas proportionnels donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et O ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AC}(-6 ; -10 ; 4)$ donc $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

$\overrightarrow{AD}(6 ; -10 ; 4)$: les triplets (3 ; 5 ; –2) et (6 ; –10 ; 4) ne sont pas proportionnels donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AE}(\sqrt{2}-1\ ;\ 2\ ;\ -1)$: les triplets (3 ; 5 ; –2) et ($\sqrt{2}$ – 1 ; 2 ; –1) ne sont pas proportionnels donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et E ne sont pas alignés.

8. Réponses A, B et C.

$\overrightarrow{AB}(6\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{AC}(0\ ;\ 2\ ;\ 3)$.

$\overrightarrow{AD}(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$. $6\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

$\overrightarrow{AE}(2\ ;\ 2\ ;\ 1)$. $3\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires, les points A, B, C et E sont donc coplanaires.

$\overrightarrow{AF}(-3\ ;\ 6\ ;\ 12)$. $2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires, les points A, B, C et F sont donc coplanaires.

$\overrightarrow{AG}(1\ ;\ 3\ ;\ 4)$. Soit *a*, *b* et *c* trois réels. L'égalité $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{AG} = \vec{0}$ est équivalente au système

$$\begin{cases} 6a + c = 0 \\ 4a + 2b + 3c = 0 \\ 3b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{6}c \\ -\dfrac{2}{3}c + \dfrac{8}{3}c + 3c = 0 \\ b = -\dfrac{4}{3}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires donc les points A, B, C et G ne sont pas coplanaires.

9. Réponses B et C.

$$\begin{cases} x_A = -3+4t \\ y_A = 5t \\ z_A = 2-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -3+4t \\ 5 = 5t \\ 2 = 2-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Le système n'a donc pas de solution : le point A n'appartient pas à la droite (d).

$$\begin{cases} x_B = -3+4t \\ y_B = 5t \\ z_B = 2-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -3+4t \\ 5 = 5t \\ 1 = 2-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Le système a une solution donc B appartient à la droite (d).

Les coefficients du paramètre *t* dans la représentation paramétrique donnée de la droite (d) sont respectivement 4 ; 5 et –1 donc le vecteur $\vec{u}(4\ ;\ 5\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de (d).

Les triplets (4 ; 5 ; –1) et (4 ; 0 ; –1) ne sont pas proportionnels donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\vec{v}$ n'est pas un vecteur directeur de (d).

10. Réponses A et B.
$\overrightarrow{BC}(2 ; -2 ; 2)$.

Proposition A : exacte car la droite (d) dont on donne une représentation paramétrique passe par A qui est le point de paramètre 0 et (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; -1 ; 1)$ qui vérifie $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Proposition B : exacte car la droite (d) dont on donne une représentation paramétrique passe par A qui est le point de paramètre $-\frac{3}{2}$ et (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-2 ; 2 ; -2)$ qui vérifie $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$.

Proposition C : inexacte car la droite (d) dont on donne une représentation paramétrique a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 2 ; 1)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Proposition D : inexacte car la droite (d) dont on donne une représentation paramétrique ne passe pas par A. En effet le système $\begin{cases} x_A = 1+2t \\ y_A = 1-2t \\ z_A = 1+2t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 1 = 1+2t \\ 2=1-2t \\ 1=1+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -0,5 \\ t = 0 \end{cases}$ donc le système n'a pas de solution donc A n'appartient pas à la droite.

11. Réponses A et C.

$\overrightarrow{AB}(3 ; 3 ; -5)$ et $\overrightarrow{AC}(1 ; -7 ; -2)$.

Proposition A : exacte car une représentation paramétrique du plan (ABC) est $\begin{cases} x = x_A + 3t + t' \\ y = y_A + 3t - 7t' \\ z = z_A - 5t - 2t' \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 1 + 3t + t' \\ y = 2 + 3t - 7t' \\ z = 3 - 5t - 2t' \end{cases}$ avec t et t' réels.

Proposition B : inexacte car B n'appartient pas au plan de représentation paramétrique donnée.

En effet le système $\begin{cases} x_B = 1+t \\ y_B = 2+t' \\ z_B = 3+t \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4 = 1+t \\ 5 = 2+t' \\ -2 = 3+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = 3 \\ t = -5 \end{cases}$ donc le système n'a pas de solution.

Proposition C : exacte car le plan dont on donne un représentation paramétrique passe par le point de coordonnées (2 ; –5 ; 1), c'est-à-dire B, et ce plan est dirigé par les vecteurs de coordonnées (6 ; 6 ; –10) et (1 ; –7 ; –2), c'est-à-dire par les vecteurs $2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Proposition D : inexacte car la représentation paramétrique donnée n'est pas celle d'un plan puisque les triplets (3 ; 3 ; –5) et (–6 ; –6 ; 10) de coefficients des paramètres sont proportionnels.