Chapitre 11 Lois de probabilités à densité

Réactiver les savoirs, p. 332

Utiliser la loi binomiale

Vrai ou faux ?

1. Vrai.

Avec une calculatrice Texas, on saisit **binomFdp(100,0.45,40)**.

Avec une calculatrice Casio, on saisit **BinominalPD(40,100,0.45)**.

2. Vrai.

Avec une calculatrice Texas, on saisit **binomFRép(100,0.45,45)**.

Avec une calculatrice Casio, on saisit **BinominalCD(45,100,0.45)**.

3. Faux.

$P(X \geq 43) = 1 - P(X < 43) = 1 - P(X \leq 42) \approx 0{,}691$, à l'aide de la calculatrice.

4. Faux.

On a $P(X \leq 47) = P(X < 43) + P(43 \leq X \leq 47)$, donc $P(43 \leq X \leq 47) = P(X \leq 47) - P(X < 43)$, donc $P(43 \leq X \leq 47) = P(X \leq 47) - P(X \leq 42) \approx 0{,}384$, à l'aide de la calculatrice.

5. Vrai.

$E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}45 = 45$.

Utiliser la fonction exponentielle

QCM

6. Réponses B, C et D.

L'équation $\mathrm{e}^{-0,2x} = 0{,}5$ est équivalente à $-0{,}2x = \ln(0{,}5)$, soit $x = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}2}$.

La réponse B est bonne.

De plus, $\ln(0{,}5) = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. Ainsi, $x = \frac{-\ln(2)}{-0{,}2} = \frac{\ln(2)}{0{,}2}$.

La réponse C est bonne.

Enfin, $\frac{\ln(2)}{0{,}2} = \frac{\ln(2)}{\frac{1}{5}} = \ln(2) \times 5$.

Donc la réponse D est bonne.

7. Réponses A et C.

$$\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda(t+h)+\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda t-\lambda h+\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda h}}.$$

8. Réponse B.

On dérive les quatre fonctions dont les expressions sont proposées.

Si $G(x) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}$, alors $G'(x) = -\frac{1}{4} \times (-4)\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x}$.

Ainsi, $G'(x) \neq g(x)$, donc G n'est pas une primitive de g. La réponse A est donc fausse.

Si $G(x) = \frac{1}{4}\left(-x - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x}$, alors $G'(x) = \frac{1}{4} \times \left[(-1)\mathrm{e}^{-4x} + \left(-x - \frac{1}{4}\right)(-4)\mathrm{e}^{-4x}\right]$,
Donc $G'(x) = \frac{1}{4} \times [-\mathrm{e}^{-4x} + (4x+1)\mathrm{e}^{-4x}] = x\mathrm{e}^{-4x}$.
Ainsi, $G'(x) = g(x)$, donc G est une primitive de g. La réponse B est donc bonne.

Si $G(x) = x\mathrm{e}^{-4x}$, alors $G'(x) = 1\mathrm{e}^{-4x} - 4x\mathrm{e}^{-4x} = (1-4x)\mathrm{e}^{-4x}$.
Ainsi, $G'(x) \neq g(x)$, donc G n'est pas une primitive de g. La réponse C est donc fausse.

Si $G(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x}$, alors $G'(x) = 1\mathrm{e}^{-4x} + \left(x + \frac{1}{4}\right)(-4)\mathrm{e}^{-4x}$,
Donc $G'(x) = \mathrm{e}^{-4x} + (-4x-1)\mathrm{e}^{-4x} = -4x\mathrm{e}^{-4x}$.
Ainsi, $G'(x) \neq g(x)$, donc G n'est pas une primitive de g. La réponse D est donc fausse.

9. Réponse B.
Posons $X = -3x$. D'une part, $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x} = \lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$ par composition.
Nous avons donc une forme indéterminée du type « $-\infty \times 0$ ».
Or, par croissances comparées, $\lim_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^{X} = 0$, donc par composition, $\lim_{x\to+\infty} -3x\mathrm{e}^{-3x} = 0$.

Calculer des aires et des intégrales

Exercices

10. 1. L'aire sous la courbe de f est égale à la différence de l'aire sur [0 ; 10] et de l'aire sur [0 ; 2], soit 16,67 – 1,76, d'où 14,94.
2. a. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 5$, donc l'aire sous la courbe de f est égale à $\frac{16{,}67}{2}$, soit 8,335.
b. L'aire sous la courbe de f est égale à la différence de l'aire sur [0 ; 5] et de l'aire sur [0 ; 2], soit 8,335 – 1,73, soit 6,605.
c. L'aire sous la courbe de f entre les droites d'équation $x = 2$ et $x = 5$ est par définition $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$.
Ainsi, $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 6{,}605$.

11. La fonction F définie sur [3 ; 8] par $F(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ est une primitive de la fonction f définie sur [3 ; 8] par $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$. Ainsi, $\int_3^8 (3x^2 - 4x - 4)\mathrm{d}x = F(8) - F(3)$, soit 352 – (–3), donc 355.

12. Sur [0 ; 1], la fonction f est affine donc continue.
De plus, $0 \leq x \leq 1$, donc $-1 \leq -x \leq 0$, puis $0{,}5 \leq -x + 1{,}5 \leq 1{,}5$. Donc f est positive.
Enfin, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0)$, où $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 1{,}5x$. Ainsi, $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Faire le point, p. 355

Utiliser la loi à densité et la loi uniforme

1. Réponses A et C.

Par définition, comme X est une variable aléatoire continue sur [0 ; 1] et de densité f,
on a $P(X < 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} f(x)\mathrm{d}x$. La réponse A est donc bonne.
De plus, la fonction F définie sur [0 ; 1] par $F(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 + x)$ est une primitive de f.
Ainsi $\int_0^{0{,}5} f(x)\mathrm{d}x = F(0{,}5) - F(0)$, soit $\frac{1}{3}(0{,}5^3 + 0{,}5^2 + 0{,}5) - 0$, soit environ 0,292.
La réponse C est bonne.

2. Réponse B.

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x^3 + 2x^2 + x)\mathrm{d}x.$$

De plus, la fonction G définie sur [0 ; 1] par $G(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de la fonction g définie sur [0 ; 1] par $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$.
Ainsi $E(X) = \frac{1}{3}[G(1) - G(0)] = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0\right]$, d'où $E(X) = \frac{1}{3} \times \left[\frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \frac{6}{12}\right] = \frac{1}{3} \times \frac{23}{12} = \frac{23}{36}$.

3. Réponses A et C.

On a, pour toute variable aléatoire Y : $P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10)$. Donc la réponse C est bonne.
De plus, Y suit la loi uniforme sur l'intervalle [–10 ; 20], donc

$$P(Y > 10) = 1 - \frac{10 - (-10)}{20 - (-10)} = 1 - \frac{20}{30} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc la réponse A est bonne.

4. Réponses B et C.

La fonction de densité de la loi uniforme sur l'intervalle [–10 ; 20] est la fonction h définie par
$h(x) = \frac{1}{20-(-10)} = \frac{1}{30}$. Ainsi, $E(Y) = \int_{-10}^{20} xh(x)\mathrm{d}x = \int_{-10}^{20} \frac{x}{30}\mathrm{d}x$. La réponse C est bonne.
De plus, soit en calculant l'intégrale, soit en utilisant la formule de l'espérance pour une variable aléatoire qui suit une loi uniforme : $E(Y) = \frac{20+(-10)}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
Donc la réponse B est bonne.

Utiliser la loi exponentielle

5. Réponse A.

$P(T < 10) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}04\times 10} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}4} \approx 0{,}330$.

6. Réponses B et D.

Si $P(T > 3) = 0{,}25$, alors $\mathrm{e}^{-3\lambda} = 0{,}25$, soit $-3\lambda = \ln(0{,}25)$. Donc :

$$\lambda = \frac{\ln(0{,}25)}{-3} = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{-3} = \frac{-\ln(4)}{-3} = \frac{\ln(2^2)}{3} = \frac{2\ln(2)}{3}.$$

Ainsi, la réponse D est bonne.
De plus, $\frac{2\ln(2)}{3} \approx 0{,}462$. Donc la réponse B est bonne.

7. Réponses A et D.
$P_{T\geq 4}(T \geq 7) = P_{T\geq 4}(T \geq 4+3)$, et comme T suit une loi exponentielle, on a, d'après la propriété de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{T\geq 4}(T \geq 7) = P(T \geq 3) = \mathrm{e}^{-1\times 3} = \mathrm{e}^{-3}.$$

Utiliser la loi binomiale

8. Réponse D.
Avec une calculatrice Texas, on saisit **normalFRép(8,11,12,2)**.
Avec une calculatrice Casio, on saisit **NormCD(8,11,2,12)**.
On trouve $P(8 \leq Y \leq 11) \approx 0{,}286$.

9. Réponses A et D.
$E(Y) = 12$, donc :

$$P(Y < 12{,}6) = 0{,}5 + P(12 < Y < 12{,}6) \approx 0{,}618.$$

On aurait pu également utiliser le fait que $P(Y < 12{,}6)$ est peu différent de $P(-10^{99} < Y < 12{,}6)$ et utiliser la calculatrice. Donc la réponse A est bonne.
On a également :

$$P(Y < 12{,}6) = P\left(\frac{Y-12}{2} < \frac{12{,}6-12}{2}\right),$$

soit $P(Y < 12{,}6) = P(X < 0{,}3)$, où $X = \frac{Y-12}{2}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Par conséquent, $P(Y < 12{,}6) = \phi(0{,}3)$.
Donc la réponse D est bonne.

10. Réponse C.
$P(12 - a \leq Y \leq 12 + a) = P\left(\frac{-a}{2} \leq \frac{Y-12}{2} \leq \frac{a}{2}\right)$, donc
$P(12 - a \leq Y \leq 12 + a) = 2P\left(\frac{Y-12}{2} \leq \frac{a}{2}\right) - 1 = 2\phi\left(\frac{a}{2}\right) - 1$,
car la variable aléatoire $\frac{Y-12}{2}$ suit la loi normale centrée réduite.
Ainsi, $P(12 - a \leq Y \leq 12 + a) = 0{,}99$ est équivalente à $2\phi\left(\frac{a}{2}\right) - 1 = 0{,}99$, soit $\phi\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1{,}99}{2} = 0{,}995$.
Avec une calculatrice Texas, on saisit **FracNormale(0,995)** et avec une calculatrice Casio on saisit **InvNormCD(0,995)**. On trouve alors $\frac{a}{2} \approx 2{,}576$, donc $a \approx 5{,}15$.

11. Réponse D.
$P(Z \leq 4) = 0{,}3$ est équivalent à $P\left(\frac{Z-5}{\sigma} \leq \frac{-1}{\sigma}\right) = 0{,}3$, soit $\phi\left(\frac{-1}{\sigma}\right) = 0{,}3$ car $\frac{Z-5}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. Ainsi, en utilisant la calculatrice : $\frac{-1}{\sigma} \approx -0{,}5244$, soit $\sigma \approx \frac{1}{0{,}5244} \approx 1{,}907$.