Chapitre 5 Logarithmes

Réactiver les savoirs, p. 136

Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle

QCM

1. **Réponse A.**
L'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution, car e^x est strictement positif pour toute valeur de x.

2. **Réponse B.**
L'équation $e^x = 3$ équivaut à $x = \ln 3$: cette équation a donc une seule solution : ln 3.

3. **Réponses A et C.**
$e^0 = 1$, donc la courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point de coordonnées (0 ; 1).
$e^1 = e$, donc la courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point de coordonnées (1 ; e), mais pas par le point (1 ; 0).
e^e n'est pas égal à 1, donc la courbe représentative de la fonction exponentielle ne passe pas par le point de coordonnées (e ; 1).

4. **Réponses A et D.**
e^0 est bien égal à 1, donc la réponse A est correcte.
$(e^2)^3 = e^{2\times3} = e^6$, donc la réponse B est fausse.
e^{-1} est égal à $\frac{1}{e}$ mais pas à –e, donc la réponse C est fausse et la réponse D est juste.

5. **Réponses A et C.**
Les réponses A et C sont justes : ce sont des propriétés du cours.
La réponse B est fausse : $e^a \times e^b = e^{a+b}$ et c'est différent de $e^{a\times b}$ car $a + b$ est en général différent de $a \times b$.
La réponse D est fausse : par exemple, si $a = 0$ et $b = 0$,
alors $e^{a\times b} = e^0 = 1$ et $e^a + e^b = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2$.

6. **Réponses B et D.**
La réponse A est fausse : en effet, e^{-a} est strictement positif, alors que $-e^a$ est strictement négatif.
La réponse B est juste : c'est une propriété du cours.
La réponse C est fausse : par exemple, si $a = 0$, alors $e^{2a} = e^0 = 1$ et $2e^a = 2e^0 = 2$.
La réponse D est juste : en effet, $(e^a)^2 = e^{a\times2} = e^{2a}$.

Indice © BORDAS 2016

7.

Déterminer le signe d'une expression

Exercices

7. $f(x) = (x - 3)(x + 3)$. Avec la règle du signe du trinôme du second degré :
$f(x) > 0$ sur $]-\infty\ ; -3[$ et sur $]3\ ; +\infty[$;
$f(x) < 0$ sur $]-3\ ; 3[$;
$f(x) = 0$ si $x = -3$ ou $x = 3$.

8. $\Delta = 21^2$: le trinôme $-12x^2 + 3x + 9$ a deux racines $-\frac{3}{4}$ et 1.L'ensemble des solutions est $]-\frac{3}{4}\ ; 1[$.

9. Pour $x \neq 2$, $\frac{x+1}{x-2}$ a même signe que le trinôme du second degré $(x + 1)(x - 2)$, de racines -1 et 2. L'ensemble des solutions est $]-\infty\ ; -1[\cup]2\ ; +\infty[$.

10. Puisque $e^x > 0$ pour tout réel x, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

11. $g(x)$ est calculable si et seulement si $-5x + 4 \geq 0$, soit $x \leq \frac{4}{5}$.

12. $h(x)$ est calculable si et seulement si $x - 7 \geq 0$ et $x + 5 \geq 0$, ce qui équivaut à $x \geq 7$.

13. $j(x)$ est calculable si et seulement si $(x - 7)(x + 5) \geq 0$, soit $x \in]-\infty\ ; -5] \cup [7\ ; +\infty[$.

Calculer des dérivées et des limites

Vrai ou faux ?

14.Faux.
En effet, f est de la forme e^u avec $u(x) = x^2 + 4$, donc $f' = u'e^u$.
Puisque $u'(x) = 2x$, la dérivée de f est telle que : $f'(x) = 2xe^{x^2+4}$.

15.Vrai
En effet, $f = u \times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{2x}$, donc $f' = uv' + u'v$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2e^{2x}$.
D'où : $f'(x) = 2xe^{2x} + 1e^{2x} = (2x + 1)e^{2x}$.

16.Faux.
En effet, d'après le cours, cette limite est égale à $+\infty$.

17.Vrai.
On factorise par x : $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$. La limite de $\frac{e^x}{x}$ en $+\infty$ est $+\infty$, donc celle de $\frac{e^x}{x} - 1$ en $+\infty$ est aussi $+\infty$. Par produit, on en déduit que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

18.Faux.
En effet, d'après le cours, cette limite est égale à 1.

Indice © BORDAS 2016

Faire le point, p. 156

Résoudre des équations et des inéquations

1. Réponse B.

Conditions d'existence : $x - 4 > 0$ et $x - 6 > 0$, ce qui équivaut à $x > 4$ et $x > 6$, soit $x > 6$.
Pour $x > 6$, l'équation équivaut à : $\ln((x - 4)(x - 6)) = \ln 3$, soit $(x - 4)(x - 6) = 3$.
Ceci équivaut à $x^2 - 10x + 24 = 3$, soit à $x^2 - 10x + 21 = 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est : $\Delta = 100 - 4 \times 21 = 16$.
Cette équation a deux racines : $x' = \frac{10-4}{2} = 3$ et $x'' = \frac{10+4}{2} = 7$.
En tenant compte de la condition d'existence $x > 6$, on en déduit que la seule solution de cette équation est 7.

2. Réponse B.

Conditions d'existence : $x + 2 > 0$ et $x + 3 > 0$, ce qui équivaut à $x > -2$ et $x > -3$, soit $x > -2$.
On remarque que $\frac{1}{2}\ln 36 = \ln\sqrt{36} = \ln 6$.
Pour $x > -2$, l'inéquation équivaut à : $\ln((x + 2)(x + 3)) \leq \ln 6$, soit $(x + 2)(x + 3) \leq 6$.
Ceci équivaut à $x^2 + 5x + 6 \leq 6$, soit $x^2 + 5x \leq 0$, ou encore $x(x + 5) \leq 0$.
$x^2 + 5x$ est un polynôme du second degré de racines -5 et 0. Le coefficient de x^2 est positif, donc $x^2 + 5x$ est négatif ou nul pour x compris entre les racines -5 et 0.
Comme on a supposé $x > -2$, on en déduit que l'ensemble des solutions est$]-2 ; 0]$.

3. Réponse C.

Condition d'existence : $x > 0$.
On effectue le changement de variable $X = \ln x$.
L'inéquation s'écrit alors : $X^2 + X - 6 \leq 0$.
Le discriminant du polynôme du second degré $X^2 + X - 6$ est : $\Delta = 1 - 4 \times (-6) = 25 = 5^2$.
Ce polynôme a deux racines $X' = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $X'' = \frac{-1+5}{2} = 2$.
$X^2 + X - 6$ est un polynôme du second degré de racines -3 et 2. Le coefficient de X^2 est positif, donc $X^2 + X - 6$ est négatif ou nul pour X compris entre les racines -3 et 2.
Alors : $-3 \leq X \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq \ln x \leq 2 \Leftrightarrow e^{-3} \leq x \leq e^2$, par croissance de la fonction exponentielle.
Les valeurs de x trouvées étant strictement positives, l'ensemble des solutions de cette inéquation est $[e^{-3} ; e^2]$.

4. Réponse D.

Pour $x > 0$, $f(x) = 0$ si et seulement si $\ln(x) - 4 = 0$, soit $\ln(x) = 4$, soit $x = e^4$. Donc la réponse A est fausse.

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - (\ln(x) - 4) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) + 4}{x^2} = \frac{5 - \ln(x)}{x^2}$.
Ainsi, $f'(x) = 0$ si et seulement si $5 - \ln(x) = 0$, soit $\ln(x) = 5$, soit $x = e^5$. Donc la réponse B est fausse.
$f'(x) < 0$ équivaut à $5 - \ln(x) < 0$, soit $\ln(x) > 5$, soit $x > e^5$. Donc la réponse C est fausse.
Puisque $f'(x)$ est négatif sur $[e^5 ; +\infty[$, la fonction f est décroissante sur cet intervalle : la réponse D est juste.

Utiliser la relation fonctionnelle

5. Réponses A, C et D.

$\ln(a^5) = 5\ln(a)$; $\ln(b^{-3}) = -3\ln(b)$; $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3 = 3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = -3\ln\sqrt{b} = -\frac{3}{2}\ln(b)$.

D'où : $\ln(a^5) - \ln(b^{-3}) - 3\ln(a) + 4\ln\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3 = 5\ln(a) + 3\ln(b) - 3\ln(a) - 6\ln(b) = 2\ln(a) - 3\ln(b)$.
La réponse A est juste.
La réponse B est fausse, car $\ln(a^2b^3) = \ln(a^2) + \ln(b^3) = 2\ln(a) + 3\ln(b)$.
La réponse C est juste, car $\ln\left(\frac{a^2}{b^3}\right) = \ln(a^2) - \ln(b^3) = 2\ln(a) - 3\ln(b)$.
La réponse D est juste, car $\ln(a^2) + \ln(b^{-3}) = 2\ln(a) - 3\ln(b)$.

6. Réponse B.
$\ln(\mathrm{e}\sqrt{e}) = \ln(\mathrm{e}) + \ln(\sqrt{\mathrm{e}}) = 1 + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
$\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -2\ln(\mathrm{e}) = -2$.
$\mathrm{e}^{-\ln(2)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{ln 2}} = \frac{1}{2}$.

$\left(ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^{2n+1} = (2n+1)\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -(2n+1)\ln(\mathrm{e}) = -2n - 1$.
D'où : $\ln(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}) - \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln(2)} + \left(ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^{2n+1} = \frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{2} - 2n - 1 = 2 - 2n$.

Calculer des limites avec le logarithme népérien

7. Réponse A.
$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0}(-x+1) = 1$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
La réponse A est juste.
$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0}(x) = 0^+$, d'où $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = -\infty$.
La réponse C est fausse.
En $+\infty$, on a une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On factorise par x :
$f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) + 1$. On sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$, d'où $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -1$.
Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$, puisque $\lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$.
On en déduit : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$: la réponse B est fausse.
$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x}$. Puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, on en déduit : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$: la réponse D est fausse.

8. Réponses C et D.
$\lim_{x\to \mathrm{e}}(2\ln(x) - 3) = 2\ln(\mathrm{e}) - 3 = -1$.
$\lim_{x\to \mathrm{e}}(\ln(x) - 1) = \ln(\mathrm{e}) - 1 = 0$. Puisque $x > \mathrm{e}$, on peut préciser : $\lim_{x\to \mathrm{e}}(\ln(x) - 1) = 0^+$.
On en déduit, par quotient : $\lim_{x\to \mathrm{e}} f(x) = -\infty$.
Donc la réponse A est fausse.
En $+\infty$, on se trouve en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Puisque $\ln(x)$ ne s'annule pas sur $]0\,;+\infty[$, on peut factoriser par $\ln(x)$: $f(x) = \frac{\ln(x)\left(2 - \frac{3}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{\ln(x)}}{1 - \frac{1}{\ln(x)}}$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\ln(x)} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ln(x)} = 0$, d'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{2 - \frac{3}{ln(x)}}{1 - \frac{1}{ln(x)}} = 2$.
La limite de f en $+\infty$ est 2, donc la réponse B est fausse.
Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$, on en déduit : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, donc la réponse C est juste.
Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, alors $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2) = 0$: la réponse D est juste.

Étudier des fonctions de la forme ln *u*

9. Réponses A et D.

f est de la forme ln(*u*), avec $u(x) = \frac{2\,e^x+1}{e^x-1}$, donc $f' = \frac{u'}{u}$.

$u'(x) = \frac{2e^x(e^x-1)-(2e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}$, d'où $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}}{\frac{2\,e^x+1}{e^x-1}} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} \times \frac{e^x-1}{2e^x+1} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)(2e^x+1)}$.

Donc la réponse A est juste et la réponse B est fausse.

$\lim_{x\to 0}(2\,e^x+1) = 3$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2e^x-1) = 0^+$ (car $2e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$).

D'où $\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty$ et par composition : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to+\infty} ln(X) = +\infty$.

La réponse C est fausse.

En $+\infty$, $u(x)$ se trouve sous la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par e^x :

$u(x) = \frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 2$.

Par le théorème de la limite d'une composée : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 2} \ln(X) = \ln 2$.

La réponse D est donc exacte.

10. Réponses B et D.

f est de la forme ln(*u*), avec $u(x) = \ln(x)$. On a donc : $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$. Donc, la réponse A est fausse et la réponse B exacte.

$\lim_{x\to 1} \ln(x) = 0$, d'où $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$: la réponse C est fausse.

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$: la réponse D est exacte.