# Chapitre 7 Les nombres complexes

## Réactiver les savoirs, p. 202

### Travailler avec des équations du second degré

**QCM**

1. **Réponse D.**
L'équation est équivalente à $x^2 = -\frac{1}{4}$.

2. **Réponses B et C.**
Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25$.
D'autre part, en développant $2(x-1)(x+\frac{3}{2})$, on obtient $2x^2 + x - 3$.

3. **Réponse C.**
L'équation peut s'écrire $-x^2 + 7x - 1 = 0$, son discriminant est $\Delta = 45$.
L'équation possède deux solutions : $\frac{-7-\sqrt{45}}{2\times(-1)} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-7+\sqrt{45}}{2\times(-1)} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

### Utiliser des angles orientés

**Vrai ou faux ?**

4. **Faux.**
$\frac{31\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 3 \times 2\pi - \frac{5\pi}{6}$. La mesure principale est $-\frac{5\pi}{6}$.

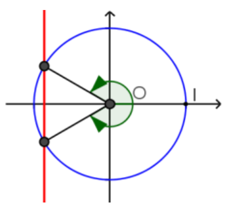
5. **Vrai.**
C'est la définition des fonctions sinus et cosinus vue en Première.

6. **Vrai.**
Les coordonnées de A sont $\left(\cos\frac{\pi}{3} ; \sin\frac{\pi}{3}\right)$, soit $\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. **Vrai.**
$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et
$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. **Faux.**
Dans $\mathbb{R}$, l'équation possède une infinité de solution.
En effet, si $\alpha$ est une solution de l'équation, alors les nombres $\alpha + k2\pi$ avec $k$ entier, sont aussi des solutions.

9. **Vrai.**
La droite $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ coupe le cercle trigonométrique en deux points.
On sait que $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
De même que $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



## Utiliser des coordonnées et des configurations du plan

### Exercices

**10.1.** $\overrightarrow{AB}(-1-(-3)\,;5-2)$, soit $\overrightarrow{AB}(2\,;3)$.

**2.** $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-3-1}{2}=-2$ et $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+5}{2}=3{,}5$, soit $\mathrm{I}(-2\,;3{,}5)$.

**3.** On cherche $x_J$ et $y_J$ tels que $x_J-x_O=2$ et $y_J-y_O=3$ donc J(2 ; 3).

**4.** AB = $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

**5.** AC = $\sqrt{8^2+(-1)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$.

BC = $\sqrt{6^2+(-4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$.

On a $AB^2+BC^2=AC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

**11.1.** $\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-3+5}{2}=1=x_D$ et $\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+1}{2}=1{,}5=y_D$. D est le milieu de [AC] qui est l'hypoténuse du triangle rectangle ABC donc le triangle ABC est inscrit dans le cercle de centre D et de rayon $\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{65}}{2}$.

**2.** Le cercle est l'ensemble des points M($x$ ; $y$) tels que DM = $\frac{\sqrt{65}}{2}$ soit $DM^2=\frac{65}{4}$.

D'où l'équation $(x-1)^2+(y-1{,}5)^2=\frac{65}{4}$.

**3.** Si E est le symétrique de A par rapport à J, J est le milieu de [AE]. Ainsi, E est tel que $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AJ}$.

On a donc :

$$\begin{cases}x_E+3=2(2+3)\\ y_E-2=2(3-2)\end{cases}\ \text{soit}\ \begin{cases}x_E=7\\ y_E=4\end{cases}$$

Ainsi E(7 ; 4).

**12.** L'ensemble des points M tels que AM = 3 est le cercle de centre A et de rayon 3.
L'ensemble des points M tels que MA = MB est la médiatrice du segment [AB].

## Faire le point, p. 225

### Déterminer et utiliser la forme algébrique d'un nombre complexe

**1. Réponse A.**

$\frac{2}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2i}{1^2-i^2} + \frac{1-2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2+2i}{2} + \frac{-2i}{2} = 1.$

**2. Réponses B et C.**

$(3+i)(1+i) - 3(1+i)^2 = 3 + 3i + i + i^2 - 3(1 + 2i + i^2) = 2 + 4i - 6i = 2 - 2i.$
D'autre part, $-2i(1+i) = -2i - 2i^2 = -2i + 2.$

**3. Réponses C et D.**

$\frac{3+i}{1-i}$ a pour conjugué $\frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i.$

**4. Réponses B et C.**

$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $(-1+i) - (3-2i) = -4 + 3i.$
Le milieu de [AB] a pour affixe $\frac{(-1+i)+(3-2i)}{2} = \frac{2-i}{2} = 1 - \frac{1}{2}i.$

### Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

**5. Réponses A et C.**

$\frac{1}{z} = \frac{1+i}{3-i}$ équivaut à $z = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2-4i}{2}$ soit $z = 1 - 2i.$

**6. Réponses B et D.**

$\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-\frac{25}{8}) = -16 = (4i)^2.$
L'équation possède deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-3-4i}{-4} = \frac{3}{4} + i$ et $z_2 = \frac{3}{4} - i.$
D'autre part, $z_1 + z_2 = \frac{3}{4} + i + \frac{3}{4} - i = \frac{3}{2}.$

### Travailler avec les modules et les arguments

**7. Réponse D.**

$z = -3 + 3i$ et $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$
$\theta$, un argument de $z$, est tel que : $\cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
On en déduit que $\theta = \frac{3\pi}{4}.$

**8. Réponse C.**

Un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}.$

**9. Réponse B.**

$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$
$\theta$, un argument de $1+i$, est tel que : $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\theta = \frac{\pi}{4}.$
Ainsi, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4$ soit $(1+i)^4 = 4e^{i\pi}.$

**10. Réponses B, C et D.**

$|z| = 4$ équivaut à $OM = 4$ donc à $z.\bar{z} = 4.$
D'autre part, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{16}$ équivaut à $z.\bar{z} = 4.$

**11. Réponse B.**
$|z+3-\mathrm{i}| = |z-2|$ équivaut à $|z-(-3+\mathrm{i})| = |z-2|$ donc à $\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$ si A, B et M sont les points d'affixes respectives z, $-3+\mathrm{i}$ et 2. L'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].