Chapitre 9 Produit scalaire dans l'espace

Réactiver les savoirs, p. 272

Calculer et utiliser le produit scalaire dans le plan

QCM

1. Réponse C.

Le triangle ABC est rectangle en A donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 0$.

2. Réponses A, B et C.

I est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{BI}$. Ainsi $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.(2\,\overrightarrow{BI}) = 2\overrightarrow{BA}.\,\overrightarrow{BI}$.

Comme ABC est rectangle en A, le projeté orthogonal de C sur (AB) est A,

donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = BA \times BA = a^2$.

ABC est rectangle isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ rad. On a alors $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(\frac{\pi}{4})$.

Comme ABC est rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2a^2$ puisque AB = AC (ABC étant de plus isocèle en A). On a alors $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = 2a^2 \neq \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

3. Réponses A et C.

$\overrightarrow{BA}(-3\,;-2)$ et $\overrightarrow{BC}(5\,;-1)$ donc $BA = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2}$ et $BC = \sqrt{5^2 + (-1)^2}$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -3 \times 5 + (-2) \times (-1) = -15 + 2 = -13$.

$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \dfrac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{-1}{\sqrt{2}}$ donc $\widehat{ABC} \neq \frac{\pi}{6}$.

4. Réponses A et D.

Si $\vec{v}(6\,;9)$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 9 \times 6 + (-6) \times 9 = 54 - 54 = 0$: le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$.

Si $\vec{v}(3\,;-2)$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 9 \times 3 + (-6) \times (-2) = 27 + 12 = 39 \neq 0$: le vecteur $\vec{u}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\vec{v}$.

Si $\vec{v}(6\,;-9)$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 9 \times 6 + (-6) \times (-9) = 54 + 54 = 108 \neq 0$: le vecteur $\vec{u}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\vec{v}$.

Si $\vec{v}(2\,;3)$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 9 \times 2 + (-6) \times 3 = 18 - 18 = 0$: le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$.

5. Réponses B et C.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}(a\,;\,b)$.

La droite (d) d'équation $2x - 4y - 5 = 0$ a donc pour vecteur normal le vecteur $\vec{u}(2\,;\,-4)$.

Les vecteurs normaux à une droite sont tous colinéaires entre eux donc la droite (d) a aussi pour vecteur normal le vecteur de coordonnées (1 ; –2).

Les vecteurs de coordonnées respectives (4 ; 2) et (2 ; 4) ne sont pas des vecteurs normaux à (d).

Reconnaître l'orthogonalité dans l'espace

Vrai ou faux ?

6. Vrai.
La droite (FG) est perpendiculaire au plan (ABF) et (EI) est incluse dans ce plan.

7. Faux.
La droite (BG) est incluse dans le plan (ABG) mais (BF) et (BG) sont sécantes non perpendiculaires.

8. Vrai.
La droite (HG) est perpendiculaire à (EH) car EFGH est un rectangle et (HG) est également perpendiculaire à (HD) car DCGH est également un rectangle. La droite (HG) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (AED) donc (HG) est perpendiculaire au plan (AED).

9. Vrai.
La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) donc toute droite perpendiculaire à (ABC) est parallèle à (AE).

Calculer avec des coordonnées dans l'espace

Exercices

10. Les coefficients du paramètre t dans la représentation paramétrique donnée de la droite (d) étant respectivement 2 ; 3 et 5, le vecteur $\vec{u}(2\,;\,3\,;\,5)$ est un vecteur directeur de (d).

11. On résout le système $\begin{cases} 1+2t = 9 \\ -4+3t = 8 \\ 2+5t = 22 \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} t = 4 \\ t = 4 \\ t = 4 \end{cases}$.

Le point A appartient donc à (d) puisqu'il s'agit du point de paramètre 4.

On résout le système $\begin{cases} 1+2t = -5 \\ -4+3t = -13 \\ 2+5t = -17 \end{cases}$. Ce système équivaut à $\begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -\dfrac{19}{5} \end{cases}$.

Le système n'ayant pas de solution, le point B n'appartient pas à (d).

12. 1. La droite (d') passe par le point C(2 ; 4 ; 8) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1\ ;\ 5\ ;\ 1)$ donc (d') a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 4 + 5k \\ z = 8 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. On résout le système $\begin{cases} 1+2t = 2-k \\ -4+3t = 4+5k \\ 2+5t = 8+k \end{cases}$.

Ce système est équivalent à $\begin{cases} k = 1-2t \\ -4+3t = 4+5(1-2t) \\ 2+5t = 8+1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1-2t \\ 13t = 13 \\ 7t = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$.

Les droites (d) et (d') sont donc sécantes en D, point de paramètre $t = 1$ de la droite (d), c'est-à-dire en D(3 ; –1 ; 7).

13. $\overrightarrow{AB}(-14\ ;\ -21\ ;\ -39)$ et $\overrightarrow{AE}(-5\ ;\ -1\ ;\ -34)$. Les triplets (–14 ; –21 ; –39) et (–5 ; –1 ; –34) ne sont pas proportionnels donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires : le point E n'appartient pas à la droite (AB).

Faire le point, p. 291

Calculer un produit scalaire dans l'espace

1. Réponse B.

SAB est un triangle équilatéral donc $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = 1 \times 1 \times \cos(60°) = 0{,}5$.
De même SCD est équilatéral donc $\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{SC} = 0{,}5$.

Comme AB = BC = CD = DA, le quadrilatère est un losange donc ses diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$.

Comme $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SB}$, on a :

$$\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{SD}.\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SD}.\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SD}.\overrightarrow{SD} + SD \times SB \times \cos(\widehat{DSB}) = -1 + 0{,}5 = -0{,}5.$$

2. Réponses B et C.

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 14$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \times 14 = 7$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = 14 + BC^2 = 14 + 4 = 18$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -14$ et $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA \times BC}$ donc $\cos(\widehat{BAC}) < 0$.

3. Réponses B, C et D.

- On a $\overrightarrow{BC}(2\,;-8\,;-6)$ et $\overrightarrow{BA}(-2\,;-3\,;1)$ donc :
  $$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 2 \times (-2) + (-8) \times (-3) + (-6) \times 1 = -4 + 24 - 6 = 14.$$
- $BC = \sqrt{2^2+(-8)^2+(-6)^2} = \sqrt{104}$ et $BA = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{14}$.
  $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{14}{\sqrt{104}\times\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{7}{52}}$.
  On obtient à l'aide de la calculatrice $\widehat{ABC} \approx 1{,}20$ radian à 0,01 près.
- $\overrightarrow{AC}(4\,;-5\,;-7)$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -2 \times 4 + (-3) \times (-5) + 1 \times (-7) = -8 + 15 - 7 = 0$.
  Par conséquent les droites (AC) et (AB) sont orthogonales, et comme elles sont également sécantes en A, ces droites sont perpendiculaires.
- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 4 \times 2 + (-5) \times (-8) + (-7) \times (-6) = 8 + 40 + 42 = 90$.

Utiliser une équation d'un plan

4. Réponses A et D.

Notons $\mathcal{P}$ le plan passant par A(1 ; –2 ; 3) et de vecteur normal $\vec{n}(5\,;-2\,;-1)$.

$\mathcal{P}$ a pour équation $5x - 2y - z + d = 0$, or $A \in \mathcal{P}$ donc $5 \times 1 - 2 \times (-2) - 3 + d = 0$, soit $d = -6$.

$\mathcal{P}$ a donc pour équation $5x - 2y - z - 6 = 0$.

Le triplet (4 ; –1 ; 7) n'est pas proportionnel au triplet (5 ; –2 ; –1) donc $4x - y + 7z - 6 = 0$ n'est pas une équation de $\mathcal{P}$.

$-10x_A + 4y_A + 2z_A + 6 = -10 \times 1 + 4 \times (-2) + 2 \times 3 + 6 = -10 - 8 + 6 + 6 = -6 \neq 0$,
donc $-10x + 4y + 2z + 6 = 0$ n'est pas une équation de $\mathcal{P}$.

$5x - 2y - z - 6 = 0$ équivaut à $0{,}5 \times (5x - 2y - z - 6) = 0$, donc à $2{,}5x - y - 0{,}5z - 3 = 0$
et à $2{,}5x - y - 0{,}5z = 3$ qui est donc une équation de $\mathcal{P}$.

5. Réponse D.
On a $\overrightarrow{AB}(1 ; -1 ; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1 ; 8 ; -2)$.

Proposition A : $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + (-2) \times 8 + (-3) \times (-2) = -1 - 16 + 6 = -11$.

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC).

Proposition B : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 18 \times 1 + (-3) \times (-1) + 21 \times 1 = 18 + 3 + 21 = 42$.

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC).

Proposition C : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-2) \times (-1) + 2 \times 1 = 2 + 2 + 2 = 6$.

$\vec{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{n}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC).

Proposition D : $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = (-6) \times 1 + 1 \times (-1) + 7 \times 1 = -6 - 1 + 7 = 0$

et $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = (-6) \times (-1) + 1 \times 8 + 7 \times (-2) = 6 + 8 - 14 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, deux vecteurs non colinéaires de (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

6. Réponse B.
L'équation $y = x$ équivaut à $x - y = 0$ donc cette équation est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$, $c = d = 0$. Il s'agit donc de l'équation d'un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(1 ; -1 ; 0)$.
Les points de l'axe (Oz) sont les points de coordonnées (0 ; 0 ; z) qui vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ contient l'axe (Oz).

Le vecteur $\vec{n}(1 ; -1 ; 0)$, normal à $\mathcal{P}$, n'est pas colinéaire à $\vec{i}(1 ; 0 ; 0)$, vecteur directeur de l'axe (Ox), donc $\mathcal{P}$ n'est pas perpendiculaire à (Ox).

7. Réponses A et C.
D'après le cours, le vecteur $\vec{n}(2 ; -5 ; 3)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - 5y + 3z - 1 = 0$.

Les vecteurs normaux au plan d'équation $2x - 5y + 3z - 1 = 0$ sont les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{n}(2 ; -5 ; 3)$ donc les vecteurs de coordonnées respectives (3 ; 1 ; 0) et (4 ; 25 ; 9) ne sont pas des vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$.

Le vecteur de $\vec{n}_1(-6 ; 15 ; -9)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ car $\overrightarrow{n_1} = -3\vec{n}$.

Étudier l'intersection de droites et de plans

8. Réponses C et D.

Le vecteur $\vec{n}(1 ; 2 ; 3)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Le vecteur $\vec{u}(-4 ; -1 ; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

$\vec{n}.\vec{u} = 1 \times (-4) + 2 \times (-1) + 3 \times 2 = -4 - 2 + 6 = 0$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont donc orthogonaux, ce qui prouve que (d) est parallèle à $\mathcal{P}$.

Le point de paramètre 0 de (d) est A(–7 ; 0 ; 5).

Comme $x_A + 2y_A + 3z_A - 8 = -7 + 2 \times 0 + 3 \times 5 - 8 = -7 + 15 - 8 = 0$, le point A appartient également à $\mathcal{P}$ et (d) étant parallèle à $\mathcal{P}$, cette droite est donc incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

9. Réponse A et D.

Proposition A : les triplets (–2 ; 1 ; 7) et (5 ; 2 ; 7) ne sont pas proportionnels donc $\mathcal{P}$ est sécant au plan d'équation $5x + 2y + 7z = 0$.

Proposition B : les triplets (–2 ; 1 ; 7) et (5 ; –3 ; –1) ne sont pas proportionnels donc $\mathcal{P}$ n'est pas parallèle au plan d'équation $5x - 3y - z + 2 = 0$.

Proposition C : les triplets (–2 ; 1 ; 7) et (–4 ; –2 ; –14) ne sont pas proportionnels donc $\mathcal{P}$ n'est pas parallèle donc pas confondu avec le plan d'équation $-4x - 2y - 14z = 16$.

Proposition D : les triplets (–2 ; 1 ; 7) et (0 ; 0 ; 1) ne sont pas proportionnels donc $\mathcal{P}$ est sécant au plan d'équation $z = 0$.