89. **1.** Pour tout réel x de I $=]2;+\infty[$, $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2x+4$ et $v(x)=x-2$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur I et v ne s'annule pas sur cet intervalle.

On a $u'(x)=2$ et $v'(x)=1$.
Ainsi, f est dérivable sur I et on a :

$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{2(x-2)-(2x+4)\times 1}{(x-2)^2}$,
soit $f'(x)=\frac{2x-4-2x-4}{(x-2)^2}$

ou encore $f'(x)=\frac{-8}{(x-2)^2}$.

2. a. Soit x un réel de I. On a : $2+\frac{8}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-2}+\frac{8}{x-2}=\frac{2x-4}{x-2}+\frac{8}{x-2}=\frac{2x+4}{x-2}$.
Or, $f(x)=\frac{2x+4}{x-2}$, donc $f(x)=2+\frac{8}{x-2}$.
b. En gardant la notation $v(x)=x-2$ pour tout réel x de I, on a $f(x)=2+8\times\frac{1}{v(x)}$ donc
$f'(x)=8\times\left(-\frac{v'(x)}{(v(x))^2}\right)$, soit $f'(x)=8\times\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)$, ou encore $f'(x)=-\frac{8}{(x-2)^2}$.
On retrouve bien la réponse apportée à la question **1.**.

3. a. Le nombre dérivé de f en 3 est $f'(3)$. Or, $f'(3)=-\frac{8}{(3-2)^2}=-\frac{8}{1^2}=-8$.
Donc le nombre dérivé de f en 3 est -8.

b. On peut utiliser la formule générale de l'équation d'une tangente (voir page 108 du manuel).
La droite T est la tangente à C au point d'abscisse 3, donc T admet pour équation :

$$y=f(3)+f'(3)(x-3).$$

On a $f(3)=\frac{2\times 3+4}{3-2}=\frac{10}{1}=10$ et $f'(3)=-8$ d'après la question précédente.

Donc T a pour équation $y=10+(-8)(x-3)$,
soit $y=10-8x+24$,
c'est-à-dire $y=-8x+34$.

4. a. Soit x un réel de $]2;+\infty[$.
On a $f(x)-(-8x+34)=\frac{2x+4}{x-2}+8x-34=\frac{(2x+4)}{x-2}+\frac{(8x-34)(x-2)}{x-2}$,
soit $f(x)-(-8x+34)=\frac{2x+4+(8x-34)(x-2)}{x-2}=\frac{2x+4+8x^2-16x-34x+68}{x-2}=\frac{8x^2-48x+72}{x-2}$.

Ainsi, en factorisant le numérateur par 8, on obtient : $f(x) - (-8x + 34) = \frac{8(x^2-6x+9)}{x-2}$.

b. Pour étudier la position relative de *T* et *C* sur I, on doit comparer $f(x)$ et $-8x + 34$ pour tout réel *x* de I.
Pour cela, on peut étudier le signe de $f(x) - (-8x + 34)$.

D'après la question précédente, étudier le signe de $f(x) - (-8x + 34)$ revient à étudier le signe du quotient $\frac{8(x^2-6x+9)}{x-2}$. Or, le nombre 8 est positif et pour tout réel *x* de I, $x - 2 > 0$ (car $x > 2$).
Donc sur I, $\frac{8(x^2-6x+9)}{x-2}$ a le même signe que $x^2 - 6x + 9$.

Il reste donc à étudier le signe de $x^2 - 6x + 9$.
Pour cela, on cherche les racines de ce trinôme, qui est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$; $b = -6$ et $c = 9$.
Le discriminant est donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$.
Comme le discriminant est égal à 0, $x^2 - 6x + 9$ n'a qu'une seule racine :
$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times1} = \frac{6}{2} = 3$.
De plus, $a = 1 > 0$ donc pour tout réel *x* de I différent de 3, $x^2 - 6x + 9 > 0$.

On a également $x^2 - 6x + 9 = 0$ pour $x = 3$.
Ainsi, pour tout réel *x* de I différent de 3, $\frac{8(x^2-6x+9)}{x-2} > 0$ (il y a égalité pour $x = 3$).

Par conséquent, pour tout réel *x* de I différent de 3, $f(x) - (-8x + 34) > 0$,
donc $f(x) > -8x + 34$, donc *C* est au-dessus de sa tangente *T* sur I.