

109. 1. On remarque que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = u(x) \times v(x)$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x), \text{ soit } f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{soit } f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}.$$

Remarque : on peut simplifier l'expression précédente :

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}, \text{ soit } f'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

2. On remarque que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = u(x) \times v(x)$,

avec $u(x) = 2x^2 + 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$u'(x) = 4x \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$\text{soit } f'(x) = 4x \times \sqrt{x} + (2x^2 + 3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{soit } f'(x) = 4x\sqrt{x} + \frac{2x^2+3}{2\sqrt{x}}.$$

Remarque : on peut simplifier l'expression précédente : $f'(x) = \frac{4x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 2x^2 + 3}{2\sqrt{x}}$,

$$\text{soit } f'(x) = \frac{8x^2 + 2x^2 + 3}{2\sqrt{x}} = \frac{10x^2 + 3}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{10x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{ou encore } f'(x) = \frac{5x\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{c'est-à-dire } f'(x) = 5x\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$