67 **a.** f est de la forme $\frac{u}{v}$ dont la dérivée est $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$u(x) = 4x + 7$ donne $u'(x) = 4$ et $v(x) = x^2 + 2$ donne $v'(x) = 2x$.

Par conséquent :

$$f'(x) = \frac{4\,(x^2 + 2) - (4\,x + 7)\,(2\,x)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{4\,x^2 + 8 - 8x^2 - 14\,x}{(x^2 + 2)^2}$$
$$= \frac{-4\,x^2 - 14\,x + 8}{(x^2 + 2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-4\,x^2 - 14x + 8$.

Le discriminant du numérateur est $\Delta = (-14)^2 - 4 \times (-4) \times 8 = 324$.

$\Delta > 0$ donc le numérateur s'annule en deux valeurs x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-(-14) - \sqrt{324}}{2 \times (-4)} = \frac{14 - 18}{-8} = \frac{-4}{-8} = 0{,}5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-14) + \sqrt{324}}{2 \times (-4)} = \frac{14 + 18}{-8} = \frac{32}{-8} = -4.$$

Le numérateur est du signe de coefficient de x^2 (qui vaut $-4 < 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines :

x	-5		-4		$0{,}5$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

De plus : $f(-5) = -\frac{13}{27}$; $f(-4) = -\frac{1}{2}$; $f(0{,}5) = 4$ et $f(1) = \frac{11}{3}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	-5		-4		$0{,}5$		1
$f'(x)$	$-\frac{13}{27}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	4	↘	$\frac{11}{3}$

b. La plus petite valeur des quatre images est $-0{,}5$ et correspond à $x = -4$: f admet un minimum en -4 qui vaut $-0{,}5$.

c. La plus grande valeur des quatre images est 4 et correspond à $x = 0{,}5$: f admet un maximum en $0{,}5$ qui vaut 4.