8 Réponse C.

On étudie la différence $e(x) = f(x) - y$.

$$e(x) = (x^3 + x^2) - (5x - 3) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

On a ainsi $e'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

Le discriminant de e' est $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 64$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $e'(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{64}}{2\times 3} = \frac{-2-8}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{64}}{2\times 3} = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

$e'(x)$ est du signe de coefficient de x^2 (qui vaut $3 > 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
e'(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc e est croissante sur $]-\infty ; -\frac{5}{3}]$, décroissante sur $[-\frac{5}{3} ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

e admet dont un minimum local en 1 qui vaut $e(1) = 1^3 + 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 0$.

Donc pour tout $x > -\frac{5}{3}$, on a $e(x) > 0$.

De plus, $e(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 5 \times (-3) + 3 = 0$.

Or e est croissante sur $]-\infty ; -\frac{5}{3}]$, qui contient -3.

Donc $e(x) < 0$ pour $x < -3$ et $e(x) > 0$ pour $x > -3$.

En résumé, le tableau de signes de $e(x)$ est :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
e'(x)		$-$	0	$+$	0	$+$	

Donc $e(x) \geq 0$ sur $[-3 ; +\infty[$.

Donc $f(x) - y \geq 0$ sur $[-3 ; +\infty[$.

Ou encore : $f(x) \geq y$ sur $[-3 ; +\infty[$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[-3 ; +\infty[$.