103 **a.** $h'(x) = 3x^2 + 4 \times 2x + 4 = 3x^2 + 8x + 4$.

Le discriminant de $h'(x)$ est $\Delta = 8^2 - 4 \times 3 \times 4 = 16$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $h'(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{-8-4}{6} = -\frac{12}{6} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-8+\sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{-8+4}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

$h'(x)$ est du signe de coefficient de x^2 (qui vaut $3 > 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines.

D'où le tableau de signes de $h'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
h'(x)		+	0	–	0	+	

h est donc croissante sur $]-\infty\,;-2]$, décroissante sur $[-2\,;-\frac{5}{3}]$ et croissante sur $[-\frac{5}{3}\,;+\infty[$.

b. $h'(x) = 3x^2 - 5 \times 2x + 3 = 3x^2 - 10x + 3$.

Le discriminant de $h'(x)$ est $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 64$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $h'(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-(-10)-\sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-10)-\sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{10+8}{6} = \frac{18}{6} = 3.$$

$h'(x)$ est du signe de coefficient de x^2 (qui vaut $3 > 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines.

D'où le tableau de signes de $h'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
h'(x)		+	0	–	0	+	

h est donc croissante sur $]-\infty\,;\frac{1}{3}]$, décroissante sur $[\frac{1}{3}\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$.

c. $h'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x - 15 = 3x^2 - 12x - 15$.

Le discriminant de $h'(x)$ est $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times (-15) = 324$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $h'(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-(-12)-\sqrt{324}}{2 \times 3} = \frac{12-18}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-12)+\sqrt{324}}{2 \times 3} = \frac{12+18}{6} = \frac{30}{6} = 5.$$

$h'(x)$ est du signe de coefficient de x^2 (qui vaut $3 > 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines.

D'où le tableau de signes de $h'(x)$:

x	$-\infty$ -1 5 $+\infty$
$h'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

h est donc croissante sur $]-\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 5]$ et croissante sur $[5 ; +\infty[$.

d. $h'(x) = 3x^2 - 3$.

Le discriminant de $h'(x)$ est $\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 36$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $h'(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-0 - \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0 + \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$$

$h'(x)$ est du signe de coefficient de x^2 (qui vaut $3 > 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines.

D'où le tableau de signes de $h'(x)$:

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$h'(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

h est donc croissante sur $]-\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Remarque : On aurait pu éviter de calculer les deux racines x_1 et x_2 à partir du discriminant Δ en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Les valeurs de x_1 et x_2 sont alors immédiates.

e. $h'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$.

Le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur : $x^2 - 4$.

Le discriminant du numérateur est $\Delta = 0 - 4 \times 1 \times (-4) = 16$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $h'(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2, avec :

$$x_1 = \frac{-0 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-0 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Le numérateur est du signe de coefficient de x^2 (qui vaut $1 > 0$) à l'extérieur de l'intervalle des racines. D'où le tableau de signes de $h'(x)$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

h est donc croissante sur $]-\infty ; -2]$, décroissante sur $[-2 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$.

Remarque : On aurait pu éviter de calculer les deux racines x_1 et x_2 à partir du discriminant Δ en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$$

Les valeurs de x_1 et x_2 sont alors immédiates.

f. $h'(x) = 4x^3$.

Comme $4 > 0$, le tableau de signes de la fonction h' est le même que celui de la fonction cube.

Le tableau de signes de la fonction h' est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

h est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.