

35 1. a. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

b. Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$, on utilise l'expression avec les normes car on connaît $CA = \|\overrightarrow{CA}\|$, $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $CB = \|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|$.

On a donc en développant $\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2$:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{CB}\|^2 &= \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Or ABCD est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont de même longueur.

On a donc : $CB = AD$.

On obtient alors :

$$AD^2 = CA^2 + AB^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Et en faisant l'application numérique :

$$7^2 = 5^2 + 9^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{49-25-81}{2} = -\frac{57}{2}.$$

2. a. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Or ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

D'où : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

b. Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, on utilise l'expression avec les normes car on connaît $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$, $AD = \|\overrightarrow{AD}\|$ et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|$.

On a donc en développant $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2$:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AC}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Donc :

$$AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Et en faisant l'application numérique

$$5^2 = 9^2 + 7^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{25-81-49}{2} = -\frac{105}{2}.$$