53 a. La présence d'angles droits à différents endroits de la figure sont des indicateurs pour utiliser la définition du produit scalaire basée sur la projection orthogonale.

Pour calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ on utilise le fait que A est le projeté orthogonal de D sur (AB).
Donc :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2 = BA^2 = 5^2 = 25.$$

Pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ on utilise le fait que B est le projeté orthogonal de C sur (AB).
Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 5^2 = 25.$$

Pour calculer $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI}$ on utilise le fait que I est le projeté orthogonal de O sur (BC)
Donc :

$$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI}^2 = BI^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

b. La présence d'angles droits à différents endroits de la figure sont des indicateurs pour utiliser la définition du produit scalaire basée sur la projection orthogonale.

Les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
On a donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Pour calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ on utilise le fait que O est le projeté orthogonal de B sur (AC).
Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO}^2 = AO^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

Dans le triangle ABC rectangle en B, on a d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = BA^2 + BC^2$. Donc :

$$AC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50.$$

Donc :

$$AC = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Donc :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{25\times 2}{4} = \frac{25}{2}$.

(CJ) et (CD) sont confondues d'une part et (IB) et (CB) sont confondues d'autre part.
Or (CD) et (CB) sont perpendiculaires, donc (CJ) et (IB) sont perpendiculaires.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$.