85 **1.** On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ en utilisant les formules suivantes.

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}(x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{D}}\,;\, y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{D}}) = \overrightarrow{\mathrm{DE}}\big((-1) - (-1)\,;\, -1 - 3\big) = \overrightarrow{\mathrm{DE}}(0\,;-4)$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}(x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{D}}\,;\, y_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{D}}) = \overrightarrow{\mathrm{DF}}(5 - (-1)\,;\, 1 - 3) = \overrightarrow{\mathrm{DF}}(6\,;\, -2)$

On utilise l'expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} &= x_{\overrightarrow{\mathrm{DE}}}x_{\overrightarrow{\mathrm{DF}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{DE}}}y_{\overrightarrow{\mathrm{DF}}} \\ &= 0 \times 6 + (-4) \times (-2) \\ &= 8.\end{aligned}$$

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ en utilisant la formule suivante.

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}(x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}\,;\, y_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{E}}) = \overrightarrow{\mathrm{EF}}(5 - (-1)\,;\, 1 - (-1)) = \overrightarrow{\mathrm{EF}}(6\,;\, 2)$

Et $\overrightarrow{\mathrm{ED}} = -\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{ED}}(0\,;\, 4)$.

On utilise l'expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ED}} &= x_{\overrightarrow{\mathrm{EF}}}x_{\overrightarrow{\mathrm{ED}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{EF}}}y_{\overrightarrow{\mathrm{ED}}} \\ &= 6 \times 0 + 2 \times 4 \\ &= 8.\end{aligned}$$

2. Pour calculer un angle en utilisant le produit scalaire, il faut partir de la formule faisant intervenir les normes et un angle.

On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \mathrm{DE} \times \mathrm{DF} \times \cos(\widehat{\mathrm{EDF}}).$$

Or on connaît déjà $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}}$ grâce à la question précédente.

Il reste donc à calculer les longueurs DE et DF.

Pour cela, on utilise la formule de la distance dans un repère orthonormé.

$$\begin{aligned}\mathrm{DE} &= \sqrt{(x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{D}})^2 + (y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{D}})^2} \\ &= \sqrt{\big((-1) - (-1)\big)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathrm{DF} &= \sqrt{(x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{D}})^2 + (y_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{D}})^2} \\ &= \sqrt{\big(5 - (-1)\big)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}.\end{aligned}$$

Donc comme : $\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \mathrm{DE} \times \mathrm{DF} \times \cos(\widehat{\mathrm{EDF}})$, on obtient:

$$8 = 4 \times 2\sqrt{10}\cos\big(\widehat{\mathrm{EDF}}\big), \text{ soit : } 8 = 8\sqrt{10}\cos\big(\widehat{\mathrm{EDF}}\big).$$

Donc :

$$\cos\big(\widehat{\mathrm{EDF}}\big) = \frac{8}{8\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

À la calculatrice, on obtient : $\widehat{\mathrm{EDF}} \approx 72°$

De même :

$$\mathrm{EF} = \sqrt{(x_\mathrm{F} - x_\mathrm{E})^2 + (y_\mathrm{F} - y_\mathrm{E})^2}$$
$$= \sqrt{\big(5-(-1)\big)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Comme $\mathrm{DF} = \mathrm{EF}$, le triangle EDF est isocèle en F et on obtient : $\widehat{\mathrm{DEF}} = \widehat{\mathrm{EDF}} \approx 72°$.

La somme des mesures des angles dans un triangle et égale à 180°.
Donc :
$\widehat{\mathrm{DFE}} + \widehat{\mathrm{EDF}} + \widehat{\mathrm{DEF}} = 180°$
Donc :
$\widehat{\mathrm{DFE}} = 180 - \widehat{\mathrm{EDF}} - \widehat{\mathrm{DEF}}$

Finalement :

$$\widehat{\mathrm{DFE}} \approx 180 - 2 \times 72 = 36°.$$