

145 En utilisant la bilinéarité, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) \\ &= \vec{i} \cdot \frac{3}{5}\vec{i} + \vec{i} \cdot \frac{4}{5}\vec{j} - 2\vec{j} \cdot \frac{3}{5}\vec{i} - 2\vec{j} \cdot \frac{4}{5}\vec{j} \\ &= \frac{3}{5}\vec{i} \cdot \vec{i} + \frac{4}{5}\vec{i} \cdot \vec{j} - 2 \times \frac{3}{5}\vec{j} \cdot \vec{i} - 2 \times \frac{4}{5}\vec{j} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

Or le repère est orthonormé, donc : $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ d'une part, et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ d'autre part. Donc :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{5}{5} \\ &= -1\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= \left(\frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right) \\ &= \frac{3}{5}\vec{i} \cdot \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{i} \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{j}\right) + \frac{4}{5}\vec{j} \cdot \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} \cdot \left(-\frac{3}{5}\vec{j}\right) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{12}{5} - \frac{12}{5} \\ &= 0\end{aligned}$$

Pour les carrés scalaires, on utilise la formule de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$$

et

$$\vec{w}^2 = \|\vec{w}\|^2 = x_{\vec{w}}^2 + y_{\vec{w}}^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1.$$