101 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $v_n \leq -4$ ».
Initialisation : on souhaite montrer que $P(0)$ est vraie, c'est-à-dire que v_0 est bien inférieur ou égal à – 4.
Or, d'après l'énoncé, $v_0 = -5$ et on sait que $-5 \leq -4$, donc $v_0 \leq -4$.
Ainsi, $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit p entier naturel tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $v_p \leq -4$.
On souhaite montrer alors que $P(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_{p+1} \leq -4$.
D'après l'énoncé, $v_{p+1} = 3v_p + 8$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $v_p \leq -4$.
Ainsi, $v_{p+1} = 3v_p + 8 \leq 3 \times (-4) + 8$, soit $v_{p+1} \leq -12 + 8$.
Donc $v_{p+1} \leq -4$. Ainsi, $P(p+1)$ est vraie.
Par conséquent, la propriété $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $v_n \leq -4$ pour tout entier naturel n.