102 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $u_n = 3^n - 5n$ ».
Initialisation : on souhaite montrer que $P(0)$ est vraie, c'est-à-dire que u_0 est bien égal à $3^0 - 5 \times 0$.
Or, d'après l'énoncé, $u_0 = 1$. De plus, $3^0 - 5 \times 0 = 1 - 0 = 1$.
Ainsi, u_0 et $3^0 - 5 \times 0$ sont tous deux égaux à 1.
Par conséquent, $u_0 = 3^0 - 5 \times 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit p entier naturel tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que :
$u_p = 3^p - 5p$.
On souhaite montrer alors que $P(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :
$u_{p+1} = 3^{p+1} - 5(p+1)$.
D'après l'énoncé, $u_{p+1} = 3u_p + 10p - 5$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_p = 3^p - 5p$. Ainsi,
$u_{p+1} = 3(3^p - 5p) + 10p - 5$,
soit, en développant,
$u_{p+1} = 3 \times 3^p - 3 \times 5p + 10p - 5$
$u_{p+1} = 3^{p+1} - 15p + 10p - 5$.
Par conséquent,
$u_{p+1} = 3^{p+1} - 5p - 5$.
En factorisant les deux derniers termes par -5, $u_{p+1} = 3^{p+1} - 5(p+1)$.
Ainsi, $P(p+1)$ est vraie. Par conséquent, la propriété $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $u_n = 3^n - 5n$ pour tout entier naturel n.