103 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $4^n \geq 1 + 3n$ ».
Initialisation : on souhaite montrer que $P(0)$ est vraie, c'est-à-dire que 4^0est bien supérieur ou égal à $1 + 3 \times 0$.
Or, d'une part, $4^0 = 1$. D'autre part, $1 + 3 \times 0 = 1 + 0 = 1$.
Ainsi, 4^0 et $1 + 3 \times 0$ sont tous deux égaux à 1.
Donc $4^0 = 1 + 3 \times 0$. On déduit alors que $4^0 \geq 1 + 3 \times 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit p entier naturel tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que :
$4^p \geq 1 + 3p$.
On souhaite montrer alors que $P(p + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que :
$4^{p+1} \geq 1 + 3(p + 1)$.
D'une part, on a $4^{p+1} = 4^p \times 4$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $4^p \geq 1 + 3p$.
Ainsi, $4^{p+1} \geq (1 + 3p) \times 4$, soit
$4^{p+1} \geq 4 + 12p$.
D'autre part, $1 + 3(p + 1) = 1 + 3p + 3 = 4 + 3p$.
Par ailleurs, p est un entier positif, donc $12p \geq 3p$.
Ainsi, $4 + 12p \geq 4 + 3p$.
Par conséquent, $4^{p+1} \geq 4 + 12p \geq 4 + 3p = 1 + 3(p + 1)$.
Donc $4^{p+1} \geq 1 + 3(p + 1)$. Ainsi, $P(p + 1)$ est vraie.
Par suite, la propriété $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $4^n \geq 1 + 3n$ pour tout entier naturel n.