Chapitre 1
Combinatoire et dénombrement

Revoir des points essentiels

115 Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $u_n = 2 \times 5^n + 1$ ».
Initialisation : on souhaite montrer que $P(0)$ est vraie,
c'est-à-dire que u_0 est bien égal à $2 \times 5^0 + 1$.
Or, d'après l'énoncé, $u_0 = 3$. De plus, $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$.
Ainsi, $u_0 = 2 \times 5^0 + 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit p entier naturel tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_p = 2 \times 5^p + 1$.
On souhaite montrer alors que $P(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{p+1} = 2 \times 5^{p+1} + 1$.
D'après l'énoncé, $u_{p+1} = 5u_p - 4$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_p = 2 \times 5^p + 1$.
Ainsi, $u_{p+1} = 5(2 \times 5^p + 1) - 4$,
soit $u_{p+1} = 5 \times 2 \times 5^p + 5 \times 1 - 4 = 2 \times 5 \times 5^p + 5 - 4$,
ou encore $u_{p+1} = 2 \times 5^{p+1} + 1$.
Ainsi, $P(p+1)$ est vraie. Par conséquent, la propriété $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire $u_n = 2 \times 5^n + 1$ pour tout entier naturel n.

116 Pour tout entier naturel non nul n, on note $P(n)$: « $v_n = 3^n + n$ ».
Initialisation : on souhaite montrer que $P(1)$ est vraie, c'est-à-dire que
v_1 est bien égal à $3^1 + 1$.
Or, d'après l'énoncé, $v_1 = 4$. De plus, $3^1 + 1 = 3 + 1 = 4$.
Ainsi, $v_1 = 3^1 + 1$. Donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité : soit p entier naturel tel que $P(p)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $v_p = 3^p + p$.
On souhaite montrer alors que $P(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_{p+1} = 3^{p+1} + p + 1$.
D'après l'énoncé, $v_{p+1} = 3v_p - 2p + 1$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $v_p = 3^p + p$. Ainsi, $v_{p+1} = 3(3^p + p) - 2p + 1$, soit
$v_{p+1} = 3 \times 3^p + 3p - 2p + 1$,
ou encore $v_{p+1} = 3^{p+1} + p + 1$.
Ainsi, $P(p+1)$ est vraie. Par conséquent, la propriété $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire.
Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n, c'est-à-dire $v_n = 3^n + n$ pour tout entier naturel non nul n.

117 Soit E l'ensemble des participants à ce jeu.
D'après l'énoncé, E est composé de 5 000 éléments. Un binôme gagnant est une partie de 2 éléments issus de E : l'ordre dans lequel on choisit les deux éléments n'a pas d'importance et on ne peut pas désigner deux fois la même personne. Le nombre de binômes différents est alors égal au nombre de parties de E composées de 2 éléments, soit $\binom{5\,000}{2}$. Or,

$$\binom{5\,000}{2} = \frac{5\,000 \times 4\,999}{2} = 12\,497\,500.$$

Il y a donc 12 497 500 binômes gagnants possibles.

118 Le tirage des 4 boules est simultané.
Il n'y a donc pas d'ordre et on ne peut pas tirer plusieurs fois la même boule.
Ainsi, en notant B l'ensemble des 6 boules bleues, le nombre de tirages de 4 boules bleues est égal au nombre de parties de 4 éléments issus de B, soit $\binom{6}{4}$.
Or, ce nombre est égal à $\frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$, c'est-à-dire 15.
Il y a donc 15 tirages différents qui permettent de ne tirer que des boules bleues.