Sujet B

1. Pour $n \geq 2$, la fonction f_n est définie sur l'intervalle [1 ; 2] par $f_n(x) = \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
Ainsi la fonction f_n est continue et positive sur [1 ; 2].
I_n représente l'aire sous la courbe de la fonction f_n sur l'intervalle [1 ; 2].
On remarque que C_{n+1} est en dessous de C_n sur cet intervalle.
Donc on conjecture que la suite (I_n) est décroissante.

2. a. $I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + \mathrm{e} = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$.

b. Pour $n \geq 2$, $I_{n+1} = = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = \frac{1}{x^{n-1}}$ donc $u'(x) = \frac{1-n}{x^n}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ donc $v(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Donc $I_{n+1} = \left[-\frac{1}{x^{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1-n}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + \mathrm{e} + (1-n)\int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$

$= \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

c. $I_3 = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = \mathrm{e} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2} - (\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

3. Pour $n \geq 2$, $I_{n+1} - I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{d}x$.

Pour $x \in [1 ; 2]$, $\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0$ et $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$. Donc $\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} - 1\right) < 0$.

Donc, pour $n \geq 2$, $I_{n+1} - I_n < 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

4. a. Pour $x \in [1 ; 2]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leq \mathrm{e}$.

De plus $\frac{1}{x^n} > 0$. Donc $0 \leq \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} < \frac{\mathrm{e}}{x^n}$.

b. Pour $n \geq 2$, on a d'après la propriété de positivité, $I_n \geq 0$ et d'après la propriété de comparaison, $I_n \leq \int_1^2 \frac{\mathrm{e}}{x^n}\mathrm{d}x$. Or, $\int_1^2 \frac{\mathrm{e}}{x^n}\mathrm{d}x = \mathrm{e}\left[\frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^2 = -\frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$.

Donc, pour $n \geq 2$, $0 \leq I_n \leq \frac{-\mathrm{e}}{1-n}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$.

c. $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ et par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - 1 = -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-\mathrm{e}}{1-n} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.