Sujet D

1. La fonction f est continue et positive sur]0 ; +∞[donc $\int_2^{10} f(x)dx$ représente l'aire, en u.a., du domaine délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 10$. Graphiquement, on compte 25 carreaux contenus dans ce domaine et 33 carreaux contenant le domaine.

Ainsi : $25 < \int_2^{10} f(x)\mathrm{d}x < 33$.

2. a. F est dérivable sur]0 ; +∞[.

Pour $x > 0$, $F'(x) = \ln(x) + \frac{x+1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} - 1 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur]0 ; +∞[.

b. $\mu = \frac{1}{10-2}\int_2^{10} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(F(10) - F(2)\right) = \frac{11}{8}\ln(10) - \frac{3}{8}\ln(2) - 1 \approx 1{,}91.$

3. a. La tangente T a pour équation réduite : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

La fonction f est dérivable sur]0 ; +∞[et $f'(x) = f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

Donc $f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. De plus, $f(2) = \ln(2) + \frac{1}{2}$.

Ainsi, $y = \frac{1}{4}(x-2) + \ln(2) + \frac{1}{2}$ soit $y = \frac{1}{4}x + \ln(2)$.

b. Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

De plus, f' est dérivable sur]0 ; +∞[et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \left(\frac{-2x}{x^4}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$.

$x^3 > 0$ car $x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $2 - x$.

Or, $2 - x \leq 0$ lorsque $x \geq 2$. Donc f est concave sur [2; +∞[.

c. D'après la question précédente, on peut dire que f est convexe sur]0 ; 2] et concave sur [2 ; +∞[. Le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion.

Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de T sur]0 ; 2] et $\mathscr{C}$ est en dessous de T sur [2 ; +∞[.

4. Sur l'intervalle [2 ; 8], $\mathscr{C}$ est en dessous de T. On note $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a., de $\mathscr{S}$.

Ainsi, $\mathscr{A} = \int_2^8 \left(\frac{1}{4}x + \ln(2) - f(x)\right)\mathrm{d}x$ u.a.

$$\text{Or, } \int_2^8 \left(\frac{1}{4}x + \ln 2 - f(x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}x^2 + x\ln(2) - F(x)\right]_2^8$$
$$= 8 + 8\ln(2) - 9\ln(8) + 8 - (0{,}5 + 2\ln(2) - 3\ln(2) + 2)$$
$$= 13{,}5 + 9\ln(2) - 27\ln(2)$$
$$= 13{,}5 - 18\ln(2).$$

Donc $\mathscr{A} = 13{,}5 - 18\ln(2)$ u.a. soit environ 1,02 u.a.