127 **1.** La fonction f est dérivable sur l'intervalle [1 ; 4].

Pour x de [1 ; 4], $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.

Comme $x \geq 1$ alors $x - 1 \geq 0$. De plus, $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^2 > 0$.

Donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur [1 ; 4].

2. a. La fonction f est croissante sur [1 ; 4] donc :

$f(1) \leq f(x) \leq f(4)$ soit $\mathrm{e} \leq f(x) \leq \frac{\mathrm{e}^4}{4}$.

b. D'après la propriété de comparaison sur les intégrales, on a :

$\int_1^4 \mathrm{e}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x \leq \int_1^4 \frac{\mathrm{e}^4}{4}\mathrm{d}x$.

Or, $\int_1^4 \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}$ et $\int_1^4 \frac{e^4}{4}\mathrm{d}x = \frac{3\mathrm{e}^4}{4}$.

Finalement, $3\mathrm{e} \leq \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{3\mathrm{e}^4}{4}$.