128 **1. a.** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1}\sin(x) - x^n \sin(x))\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \sin(x)(x-1)\mathrm{d}x$.

b. Pour x de $[0 ; 1]$, on a : $x^n \geq 0$, $\sin(x) \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$ donc $x^n \sin(x)(x-1) \leq 0$.
Finalement, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x^n \sin(x)(x-1)\mathrm{d}x \leq 0$ c'est-à-dire $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
La suite (I_n) est donc décroissante.

2. a. Pour x de $[0 ; 1]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$ et $x^n \geq 0$ donc $0 \leq x^n \sin(x) \leq x^n$.

b. D'après la propriété de positivité de l'intégrale, on en déduit que :
$\int_0^1 x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$
et d'après la propriété de comparaison que :
$\int_0^1 x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
Ainsi, $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$. Or, $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
Donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.