129 **1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$.
La fonction f_n est continue sur $[0 ; 1]$ et elle est positive puisque $1 + x^n \geq 1$ et par conséquent $\ln(1 + x^n) \geq 0$.
I_n représente donc l'aire, en u.a., du domaine délimité par la courbe de la fonction f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. Pour n de $\mathbb{N}^*$ et x de $[0 ; 1]$, on a successivement :
$x^{n+1} \leq x^n$, $1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n$ et $\ln(1 + x^{n+1}) \leq \ln(1 + x^n)$.
Donc d'après la propriété de comparaison,
$\int_0^1 \ln(1 + x^{n+1})\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x$.
Autrement dit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n$ ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante.

3. a. Pour n de $\mathbb{N}^*$ et x de $[0 ; 1]$, $0 \leq x^n \leq 1$, $1 \leq 1 + x^n \leq 2$ et $0 \leq \ln(1 + x^n) \leq \ln(2)$.
D'après la propriété de positivité, on a donc $I_n \geq 0$ et d'après la propriété de comparaison, on a $I_n \leq \int_0^1 \ln(2)\,\mathrm{d}x$. Or, $\int_0^1 \ln(2)\,\mathrm{d}x = \ln(2)$.
Donc, pour n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \ln(2)$.

b. La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.