131 **1.** L’équation réduite de T est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.
On a donc $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$. Donc T a pour équation $y = x + 1$.

2. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f''(x) = (-e^{-x})(1 - x) + e^{-x} \times (-1) = e^{-x}(x - 2)$.

3. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 2$.
Ainsi :
- sur l’intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$: $f''(x) \leq 0$ et f est concave.
- sur l’intervalle $[2\ ;\ +\infty[$: $f''(x) \geq 0$ et f est convexe.

Par conséquent, sur l’intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de toutes ses tangentes.
T étant la tangente au point d’abscisse 0 alors $\mathscr{C}$ est en dessous de T sur $]-\infty\ ;\ 2]$.

4. a. Pour tout réel x, $f(x) - (x + 1) = xe^{-x} + 1 - x - 1 = x(e^{x} - 1)$.

b. On pose $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x} - 1$ donc $v(x) = -e^{-x} - x$.
Les fonctions u, u', v et v' sont continues sur l’intervalle $[0\ ;\ 1]$ donc :

$$\int_0^1 x(\mathrm{e}^{-x} - 1)\mathrm{d}x = [-x(\mathrm{e}^{-x} + x)]_0^1 - \int_0^1 (-\mathrm{e}^{-x} - x)\mathrm{d}x$$
$$= -1(\mathrm{e}^{-1} + 1) + \int_0^1 (\mathrm{e}^{-x} + x)\mathrm{d}x$$
$$= -\mathrm{e}^{-1} - 1 + \left[-\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= -\mathrm{e}^{-1} - 1 - \mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2} + 1$$
$$= 0{,}5 - 2\mathrm{e}^{-1} \approx -0{,}236$$

Sur l’intervalle $[0\ ;\ 1]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de T donc l’intégrale précédente représente l’opposée de l’aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathscr{C}$, T et les droites d’équations $x = 0$ et $x = 1$.