Chapitre 10
Calcul intégral

Revoir des points essentiels

133 a.

$J = \int_{-2}^{4} (9x^2 + 8x - 1)dx = [3x^3 + 4x^2 - x]_{-2}^{4}$.

$= 3 \times 4^3 + 4 \times 4^2 - 4 - \left(3 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - (-2)\right)$

$= 252 - (-6) = 258$.

b. $K = \int_{-1}^{2} (x+1)(x^2 + 2x - 5)^3 dx = \left[\frac{1}{8}(x^2 + 2x - 5)^4\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{8}(2^2 + 4 - 5)^4 - \frac{1}{8}(1 - 2 - 5)^4$

$= \frac{3^4}{8} - \frac{(-6)^4}{8}$

$= 10{,}125 - 162$

$= -151{,}875$.

c. $L = \int_{-1}^{0} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^{0} = -e^0 - (-e) = -1 + e$.

d. $M = \int_{-1}^{2} \frac{5x}{x^2+1} dx = \left[\frac{5}{2}\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{2} = \frac{5}{2}\ln(2^2+1) - \frac{5}{2}\ln((-1)^2+1)$

$= \frac{5}{2}\ln(5) - \frac{5}{2}\ln(2)$

$= \frac{5}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

134 a. $J = \int_{1}^{2} \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}\right]_{1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 4 - 0{,}5 + 0{,}75 = 4{,}25$.

b. $K = \int_{0}^{1} \frac{1}{(3x+2)^2} dx = \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{3x+2}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

c. $L = \int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_{-2}^{1} = \sqrt{2} - \sqrt{5}$.

d. $M = \int_{1}^{2} \frac{e^x}{e^x - 1} dx = [\ln(e^x - 1)]_1^2 = \ln(e^2 - 1) - \ln(e - 1) = ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right)$

$= ln\left(\frac{(e-1)(e+1)}{e-1}\right) = \ln(e+1)$.

135 **a.** J = $\int_0^{\pi} 4\sin(x)\,dx = [-4\cos(x)]_0^{\pi} = -4\cos(\pi) + 4\cos(0) = 4 + 4 = 8$.

b. K = $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$

$= \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

c. L = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

d. M = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(x^2)dx = \left[\frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi^2}{16}\right) - \sin(0)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$.

136 Soit $x \in [1 ; 2]$ alors $1 \leq x^2 \leq 4$.

Par conséquent, $x^2 - 1 \geq 0$.

La fonction f est continue et positive sur $[1 ; 2]$.

On note $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Alors $\mathscr{A} = \int_1^2 f(x)dx$ u.a.

Or, $\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{4}{3}$.

Donc $\mathscr{A} = \frac{4}{3}$ u.a.

137 Pour $x \in [-2 ; 0]$, on a $x \leq 0$.

De plus, $x^2 \leq 4$ et donc $x^2 - 4 \leq 0$. Ainsi, $x(x^2 - 4) \geq 0$.

La fonction g est continue et positive sur $[-2 ; 0]$.

On note $\mathscr{A}$ l'aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

Alors $\mathscr{A} = \int_{-2}^0 g(x)dx$ u.a.

Or, $\int_{-2}^0 g(x)dx = \left[\frac{1}{4}(x^2 - 4)^2\right]_{-2}^0 = \frac{16}{4} - 0 = 4$.

Donc $\mathscr{A} = 4$ u.a.