Sujet B

1. D'après la description de l'énoncé, $Y = 2X + 10$.
Il s'agit de l'espérance de la somme de la variable aléatoire $2X$ avec la variable aléatoire constante égale à 10, d'où $E(Y) = E(2X) + 10$.
Comme $E(aX) = aE(X)$ pour toute variable aléatoire X et tout nombre réel a, on obtient $E(2X) = 2E(X)$, d'où $E(Y) = 2E(X) + 10 = 2 \times 3 + 10 = 16$.
D'autre part, on a pour la variance $V(X) = \sigma(X)^2 = 0{,}3^2 = 0{,}09$.
Comme $V(aX + b) = V(aX)$, et $V(aX) = a^2V(X)$ pour tous nombres réels a et b et toute variable aléatoire X, on a : $V(2X + 10) = 2^2V(X) = 4 \times 0{,}09 = 0{,}36$.

2. L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev appliquée à Y donne pour tout réel δ :
$P(|Y - E(Y)| \geq \delta) \leq \dfrac{V(Y)}{\delta^2}$.
Avec $E(Y) = 16$, $V(Y) = 0{,}36$ et $\delta = 1{,}8$, on trouve $P(|Y - 16| \geq 1{,}8) \leq \frac{0{,}36}{1{,}8^2}$.
Comme $\frac{0{,}36}{1{,}8^2} = \frac{1}{9}$ d'une part, et $P(|Y - 16| > 1{,}8) \leq P(|Y - 16| \geq 1{,}8)$ d'autre part, on trouve $P(|Y - 16| > 1{,}8) \leq \frac{1}{9}$.

3. On relie d'abord les événements $\{|X - 3| \leq 0{,}9\}$ et $Y > 17{,}8$.
L'inégalité $|X - 3| \leq 0{,}9$ revient à $-0{,}9 \leq X - 3 \leq 0{,}9$ et entraîne donc $X - 3 \leq 0{,}9$, puis $X \leq 3{,}9$.
Comme $Y = 2X + 10$, cette inégalité équivaut à $Y \leq 2 \times 3{,}9 + 10$, donc $Y \leq 17{,}8$ est une conséquence de $|X - 3| \leq 0{,}9$.
Ainsi $P(Y \leq 17{,}8) \geq P(|X - 3| \leq 0{,}9)$.
En considérant l'événement contraire, $P(Y > 17{,}8) = 1 - P(Y \leq 17{,}8)$. L'inégalité $P(|X - 3| \leq 0{,}9) \geq 0{,}99$ entraîne $P(Y > 17{,}8) \leq 1 - 0{,}99$ d'où la majoration $P(Y > 17{,}8) \leq 0{,}01$.